TP8

7a) Soit $a \in (0,1)$.

Montrons que la série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2}$ converge

uniformément sur $[-a, a]$.

Soit $v_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2}$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. On a que

$$|v_n(x)| = \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right|$$

$$\leq \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right| + \left| \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right|$$

$$\leq \frac{a^{2n+1}}{2n+1} + \frac{a^{n+1}}{2n+2}$$

$$= M_n$$

On a aussi que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{2n+1} + \frac{a^{n+1}}{2n+2}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n+1} + a^{n+1}$$

qui converge, car c'est une série géométrique de raison $|a| < 1$.

Donc f converge uniformément sur $[-a, a]$ par le critère de Weierstrass.

Trouvons la limite :

Pour cela, montrons que f est dérivable.

On a que $(U_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions dérivables sur $[-a, a]$ (ce sont des polynômes). On a aussi que, $\forall n \geq 0$:

$$U_n'(x) = \frac{(2n+1)\,x^{2n}}{2n+1} - \frac{(n+1)\,x^n}{2(n+1)}$$

$$= x^{2n} - \frac{x^n}{2}$$

qui est continue $\forall n$ (polynômes).

On a aussi que f converge simplement sur $[-a, a]$, car f conv. uniformément sur $[-a, a]$.

Finalement, on a que

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n'(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} - \frac{x^n}{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2}$$

(car chaque série converge, série géométrique de raison x avec $|x| \leq |a| < 1$)

Ce sont des séries entières de rayon $R = 1$, donc par un théorème vu en classe, les séries convergent uniformément sur $[-a, a]$, donc la série combinée aussi.

On a alors que f est dérivable sur $[-a,a]$ et

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2}$$

$$= \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2(1-x)} \qquad (|x| \leq |a| < 1)$$

$$= \frac{2 - (1+x)}{2(1-x^2)}$$

$$= \frac{1-x}{2(1-x^2)}$$

$$= \frac{1}{2(1+x)}$$

Par le TFC2, puisque f' est continue sur $[-a,a]$ et $F : [-a,a] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{1}{2}\log(1+x)$ est dérivable, on a que

$$\int_0^x \frac{1}{2(1+t)}\,dt = \left[\frac{1}{2}\log(1+t)\right]_0^x \qquad \left(F' = \frac{1}{2(1+x)} = f'\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log(1+x) - 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log(1+x)$$

Donc $f(x) = \frac{1}{2}\log(1+x)$ sur $[-a,a]$ et donc f conv. unif. vers $\frac{1}{2}\log(1+x)$ sur $[-a,a]$.

7b) On a déjà vu que

$$\log(x+1) = \int_1^{x+1} \frac{dt}{t}$$

$$= \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad \forall\, x \in]-1,1[$$

On, on voit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

converge par le critère des séries alternées, car

$a_n = \frac{1}{n}$ est décroissant $\left(\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}\right)$ et $a_n \to 0$

Par le théorème d'Abel, on a alors que

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{(Théorème d'Abel)}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \log(x+1) \quad (\text{vrai } \forall x \in]-1,1[)$$

$$= \log(2) \quad \text{(log est une fonction continue)}$$

9a) Soit $\varepsilon > 0$.

Par le 8 b), on a que $\forall x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $m \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{n=1}^{m} \sin(nx) \right| = \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2} x\right) \sin\left(\frac{m}{2} x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\leq \left| \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right|$$

$$\leq \left| \frac{1}{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \right|$$

De plus, $\frac{1}{n} \downarrow 0$, car $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Par le lemme d'Abel, pour $m \geq K$:

$$\left| \sum_{n=K}^{m} \frac{\sin(nx)}{n} \right| \leq \left| \frac{1}{n \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \right|$$

Quand $m \to \infty$, on a que

$$\left| \sum_{n=K}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \right| \leq \left| \frac{1}{n \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \right|$$

En prenant le supremum sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, on a que:

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]} \left| \sum_{n=K}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \right| = 0$$

Donc la série converge uniformément sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ $\forall \varepsilon > 0$ $\square$

9b) On remarque que, lorsque $x = \frac{\pi}{N}$:

$$\left|\sum_{k=0}^{N} \sin(kx)\right| = \frac{N}{\pi} \underbrace{\left|\frac{\pi}{N}\sum_{k=0}^{N} \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right|}_{\text{Somme de Riemann sur } [0,\pi]}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$.

Soit $\varepsilon > 0$ t.q. $0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{3} - 1$.

On a alors que

$$\frac{\pi}{N}\sum_{k=0}^{N} \sin(kx) \geq I(f,P) \qquad \text{où } P = \left\{0, \frac{\pi}{N}, \frac{2\pi}{N}, \dots, \pi\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} m_k \frac{\pi}{N} \qquad \text{où } m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} \sin(x)$$

Soit $k_1 < k_2$ et $N \in \mathbb{N}$ assez grand t.q.

$$\frac{\pi}{6} < \frac{k_1\pi}{N} < \frac{\pi}{6} + \varepsilon$$

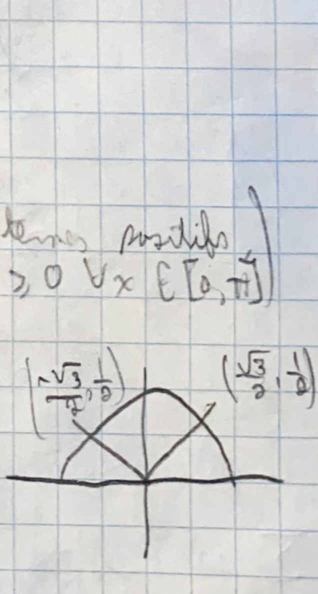
$$\frac{5\pi}{6} - \varepsilon < \frac{k_2\pi}{N} < \frac{5\pi}{6}.$$

On a alors que:

$$\frac{\pi}{N}\sum_{k=0}^{N} \sin(kx) \geq \sum_{k=0}^{N} m_k \frac{\pi}{N}$$

$$\geq \sum_{k=k_1}^{k_2} m_k \frac{\pi}{N} \qquad \left(\text{Série à termes positifs, } \sin(x) \geq 0 \ \forall x \in [0,\pi]\right)$$

$$\geq \inf_{x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]} \sin(x) \frac{(k_2-k_1)\pi}{N}$$



$$= \frac{1}{2} \frac{(k_2-k_1)\pi}{N}$$

$$> \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{6} - \varepsilon - \frac{\pi}{6} - \varepsilon\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{6} - 2\varepsilon\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} - \varepsilon > 1$$

On a alors que

$$\sum_{k=0}^{N} \sin(kx) > \frac{N}{\pi} \geq \frac{N}{\pi}$$

On remarque aussi que, pour $x = \frac{\pi}{N}$

$$\sum_{k=N}^{2N} \sin(kx) = \sum_{k=N}^{2N} \sin\left(k\frac{\pi}{N}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \sin\left((k+N)\frac{\pi}{N}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \sin\left(\frac{k\pi}{N} + \pi\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \left(\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)\cos(\pi) + \sin(\pi)\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{N} -\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)$$

$$= -\sum_{k=0}^{N} \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)$$

Donc on a bien que, pour $x = \pi/N$ et N assez grand:

$$\left|\sum_{k=N}^{2N} \sin(kx)\right| = \left|\sum_{k=0}^{N} \sin(kx)\right| \geq \frac{N}{\pi} \qquad \square$$

On a alors que:

$$\sup_{x\in[0,2\pi]}\left|\sum_{k=N}^{2N}\frac{\sin(kx)}{k}\right| \geq \sup_{x\in[0,2\pi]}\left|\sum_{k=N}^{2N}\frac{\sin(kx)}{2N}\right|$$

$$\geq \frac{1}{2N}\sup_{x\in[0,2\pi]}\left|\sum_{k=N}^{2N}\sin(kx)\right|$$

$$\geq \frac{N}{2N\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}$$

Donc $\displaystyle\sup_{x\in[0,2\pi]}\left|\sum_{k=N}^{2N}\frac{\sin(kx)}{k}\right| \underset{N\to\infty}{\not\to} 0$

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ ne converge pas uniformément sur $[0,2\pi]$

car la série n'est pas de Cauchy.

Série 5 partie 1

1. a) Calculons les coefficients de Fourier de $f(x) = x^3$.

Si $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^3 e^{-inx} \, dx \qquad \begin{array}{ll} u = x^3 & dv = e^{-inx} dx \\ du = 3x^2 dx & v = \frac{e^{-inx}}{-in} \end{array}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{x^3 e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{in} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\left(\frac{\pi^3 e^{-in\pi}}{-in} - \frac{\pi^3 e^{in\pi}}{in} \right) + \frac{3}{in} \left(\left[\frac{x^2 e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{in} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} \, dx \right) \right)$$

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = e^{-inx} dx \\ du = 2x \, dx & v = \frac{e^{-inx}}{-in} dx \end{array}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-\pi^3}{in} \left((-1)^n + (-1)^n \right) \right) + \frac{3}{2\pi n^2} \left(\pi^2 e^{-in\pi} - (-\pi)^2 e^{-inx} \right) - \frac{3}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx$$

$$= \frac{-\pi^2}{in} (-1)^n + \frac{3\pi^2}{2\pi n^2} \underbrace{\left(\cancel{(-1)^n - (-1)^n} \right)}_{0} - \frac{3}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx$$

$$= \frac{-\pi^2 (-1)^n}{in} - \frac{3}{\pi n^2} \left(\left[\frac{x e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx \right) \qquad \begin{array}{ll} u = x & dv = e^{-inx} dx \\ du = 1 & v = \frac{e^{-inx}}{-in} \end{array}$$

$$= \frac{-\pi^2 (-1)^n}{in} + \frac{3}{\pi n^3 i} \left(\pi (-1)^n + \pi (-1)^n \right) - \frac{3}{\pi i n^3} \left[\frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{-\pi^2 (-1)^n}{in} + \frac{6 (-1)^n}{n^3 i} - \frac{3}{\pi n^4} \cancel{\left((-1)^n - (-1)^n \right)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{in} \left(\frac{6}{n^2} - \pi^2 \right)$$

Si $n=0$, alors

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3\, dx$$

$$= 0 \qquad \text{(fonction impaire sur } [-\pi, \pi])$$

On a alors que la série de Fourier de x^3 est

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq 0}} e^{inx}\left(\frac{(-1)^n}{in}\left(\frac{6}{n^2} - \pi^2\right)\right)$$

b) On a que, pour $n\in\mathbb{Z}$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} e^{-inx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x-inx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{2x-inx}}{2x-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{2\pi-in\pi}}{2\pi-in\pi} - \frac{e^{-2\pi+in\pi}}{-2\pi+in\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{2\pi}(-1)^n}{2\pi-in\pi} + \frac{e^{-2\pi}(-1)^n}{2\pi-in\pi}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi(2\pi-in\pi)}\left(e^{2\pi} + e^{-2\pi}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi(2\pi - in\pi)} \left(\frac{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}{2} \right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi^2 (2 - in)} \cosh(2\pi)$$

On a alors que la série de Fourier de e^{2x} est:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} \left(\frac{(-1)^n}{\pi^2(2-in)} \cosh(2\pi) \right)$$

c) On a que, si $n \neq 0$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| x - \frac{\pi}{2} \right| e^{-inx} \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) e^{-inx} \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) e^{-inx} \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} \left[\frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi/2} - \int_{-\pi}^{\pi/2} x e^{-inx} \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} x e^{-inx} \, dx - \frac{\pi}{2} \left[\frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{\pi/2}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{-4in} \left(e^{-in\pi/2} - e^{in\pi} - e^{-in\pi} + e^{-in\pi/2} \right) + \frac{1}{2\pi} \left(- \int_{-\pi}^{\pi/2} x e^{-inx} \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} x e^{-inx} \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{-4in} \left(2(-i)^n - 2(-1)^n \right) + \frac{1}{2\pi} \left(- \int_{-\pi}^{\pi/2} x e^{-inx} \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} x e^{-inx} \, dx \right)$$

$u = x \quad dv = e^{-inx} dx$

$du = dx \quad v = \frac{e^{-inx}}{-in}$

$$= \frac{1}{2in} \left((-1)^n - (-i)^n \right) + \frac{1}{2\pi} \left(- \int_{-\pi}^{\pi/2} x e^{-inx} \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} x e^{-inx} \, dx \right)$$

Or,

$$\int_a^b x e^{-inx}\,dx \qquad \begin{array}{ll} u = x & dv = e^{-inx}\,dx \\ du = dx & v = \dfrac{e^{-inx}}{-in} \end{array}$$

$$= \left[\frac{x e^{-inx}}{-in}\right]_a^b + \frac{1}{in}\int_a^b e^{-inx}\,dx$$

$$= \left[\frac{x e^{-inx}}{-in}\right]_a^b + \frac{1}{in}\left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_a^b$$

$$= \left[\frac{x e^{-inx}}{-in} + \frac{1}{n^2} e^{-inx}\right]_a^b = \left[\frac{e^{-inx}}{n}\left(\frac{x}{-i} + \frac{1}{n}\right)\right]_a^b$$

On a donc que :

$$c_n = \frac{1}{2in}\left((-1)^n - (-i)^n\right) + \frac{1}{2\pi}\left(-\left[\frac{e^{-inx}}{n}\left(\frac{x}{-i} + \frac{1}{n}\right)\right]_{-\pi}^{\pi/2} + \left[\frac{e^{-inx}}{n}\left(\frac{x}{-i} + \frac{1}{n}\right)\right]_{\pi/2}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2in}\left((-1)^n - (-i)^n\right) + \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{e^{-in\pi/2}}{n}\left(\frac{\pi}{-2i} + \frac{1}{n}\right) + \frac{e^{-in\pi}}{n}\left(\frac{\pi}{i} + \frac{1}{n}\right) + \frac{e^{-in\pi}}{n}\left(\frac{\pi}{-i} + \frac{1}{n}\right) - \frac{e^{-in\pi/2}}{n}\left(\frac{\pi}{-2i} + \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2in}\left((-1)^n - (-i)^n\right) + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-i)^n}{n}\left(\frac{\pi}{2i} - \frac{1}{n}\right) + \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{\pi}{i} + \frac{1}{n}\right) + \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{\pi}{-i} + \frac{1}{n}\right) + \frac{(-i)^n}{n}\left(\frac{\pi}{2i} - \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2in}\left((-1)^n - (-i)^n\right) + \frac{1}{\pi n}\left((-i)^n\left(\frac{\pi}{2i} - \frac{1}{n}\right) + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{2i}\left(1 - i^n\right) + \frac{1}{\pi}\left(i^n\left(\frac{\pi}{2i} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{2i} - \cancel{\frac{i^n}{2i}} + \frac{1}{2i} - \frac{i^n}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{2i} + \frac{1}{n\pi}\left(1 - i^n\right)\right)$$

De plus, si $n = 0$, alors

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|x - \frac{\pi}{2}\right| dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi/2} \frac{\pi}{2} - x \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} x - \frac{\pi}{2} \, dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi/2} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2}x\right]_{\pi/2}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2}\right) + \left(\cancel{\frac{\pi^2}{2}} - \cancel{\frac{\pi^2}{2}} - \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{5}{4} = \frac{5\pi}{8}$$

La série de Fourier de $\left|x - \frac{\pi}{2}\right|$ est donc

$$\frac{5\pi}{8} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{2i} + \frac{1}{n\pi}\left(1 - i^n\right)\right) e^{inx}$$

d) On a que, si $n \neq 0$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2 e^{-inx}\, dx$$

$u = x^2 \qquad dv = e^{-inx}dx$

$du = 2x \qquad v = \frac{e^{-inx}}{-in}$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{x^2 e^{-inx}}{-in}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{in}\int_0^{\pi} x e^{-inx}\, dx\right)$$

$u = x \qquad dv = e^{-inx}dx$

$du = dx \qquad v = \frac{e^{-inx}}{-in}$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left(\frac{\pi^2 e^{-in\pi}}{-in} - 0\right) + \frac{2}{in}\left(\left[\frac{x e^{-inx}}{-in}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{in}\int_0^{\pi} e^{-inx}dx\right)\right)$$

$$= \frac{\pi(-1)^n}{-2in} + \frac{1}{in\pi}\left(\left(\frac{\pi(-1)^n}{-in} - 0\right) + \frac{1}{in}\left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{\pi(-1)^n}{-2in} + \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{1}{\pi i n^3}\left((-1)^n - 1\right)$$

Si $n = 0$, alors

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{\pi^3}{3}$$

$$= \frac{\pi^2}{6}$$

La série de Fourier de f est :

$$\frac{\pi^2}{6} + \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \in \mathbb{Z}}}\left(\frac{\pi(-1)^n}{-2in} + \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(-1)^n - 1}{\pi i n^3}\right) e^{inx}$$