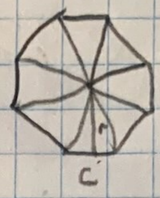
TP 7

5 a) On remarque que l'on peut séparer le polygone P_n en n triangles isocèles de même aire, dont la base est la longueur d'un côté du polygone, c, et la hauteur est l'apothème, r.

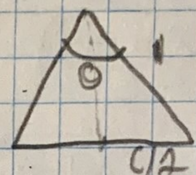
L'aire totale est donc

$$\text{Aire}(P_n) = \frac{cr}{2} \cdot n$$



b) Regardons l'aire d'un triangle.

Les côtés de même longueur ont longueur 1, car c'est le rayon du cercle circonscrit de rayon 1. L'angle θ est $\frac{2\pi}{n}$, car l'angle total du cercle, 2π, est divisé en n parties égales. On peut alors trouver la base et la hauteur du triangle rectangle à partir de l'angle $\theta/2 = 2\pi/2n$:



$$\frac{c}{2} = \sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right) \cdot 1$$

$$r = \cos\left(\frac{2\pi}{2n}\right) \cdot 1$$

Par le a), on a que, pour $n \geq 3$:

$$\text{Aire}(P_n) = \frac{cr}{2} \cdot n$$

$$= n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= \pi \cdot \frac{n}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

On a alors, avec $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} \text{Aire}(P_n) = \lim_{n \to \infty} \pi \cdot \frac{n}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= \pi \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{n}{\pi}\right)}{\frac{\pi}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

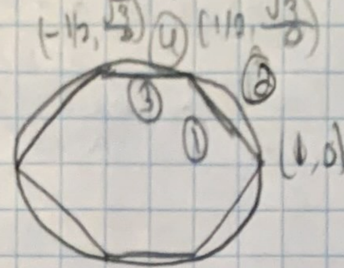
$$= \pi \cdot 1$$

$$\left(2a), \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0 \quad \lim_{n \to \infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \cos(0) = 1 \right)$$

On trouve alors l'aire du cercle π comme étant la limite quand $n \to \infty$ des aires des polygônes P_n ;

6a). Calculons la longueur des segments 1, 2, 3, 4.

Les autres segments se calculent de la même façon.



Les points du cercle respectent l'équation:

$$x^2+y^2=R^2=1$$

$$\Rightarrow \; y^2 = 1-x^2$$

$$\Rightarrow \; y=\sqrt{1-x^2}$$ (on regarde les y positifs)

Par la formule de longueur d'arc, on a alors que:

$$\text{longueur } 2 = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_{1/2}^{1} \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{1/2}^{1} \sqrt{\left(1+\frac{x^2}{1-x^2}\right)}\, dx$$

$$= \int_{1/2}^{1} \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\, dx$$

$$= \int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$> \int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$$

$$\left(\begin{array}{l} 1+x<2 \quad \forall x \in [1/2, 1[\\ \frac{1}{1+x} > \frac{1}{2} \text{, fonction cont.} \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-2\sqrt{1-x} \right]_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \left(0 + \sqrt{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= 1 .$$

De la même façon, nous avons:

$$\text{longueur } (③) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int_{-1/2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$> \int_{-1/2}^{0} 1 \, dx + \int_{0}^{1/2} 1 \, dx$$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 1 \\ \forall x \in [-1/2, 0[\\ \cup \,]0, 1/2] \\ \text{fonction continue} \end{array} \right)$$

$$= 1$$

Le côté ① forme une ligne droite d'équation

$y = mx + b$, où $m = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 0}{1/2 - 1}$

$\Rightarrow y = -\sqrt{3}x + b \qquad = -\sqrt{3}$

$\Rightarrow y' = -\sqrt{3}$

On a alors que

$$\text{longueur}(①) = \int_{1/2}^{1} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$= \int_{1/2}^{1} \sqrt{1+m^2}\,dx$$

$$= \int_{1/2}^{1} \sqrt{1+(-\sqrt{3})^2}\,dx$$

$$= \int_{1/2}^{1} 2\,dx$$

$$= 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

La longueur du côté ③ se calcule de la même façon :

$$\text{longueur}(③) = \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1+m^2}\,dx$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1+0}\,dx$$

$$= 1$$

On remarque alors que

longueur (2) > 1 = longueur (1)

longueur (4) > 1 = longueur (3)

En faisant des calculs analogues pour les autres segments, on a que la longueur d'un côté hexagone est strictement plus petite que la longueur de l'arc de cercle qu'il sous-tend.

b) On remarque que la longueur d'un arc de cercle associé est $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, et donc

$$\frac{\pi}{3} > 1$$

$$\Rightarrow \pi > 3$$

comme voulu.

$\square$

8. c) Montrons tout d'abord que $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

On a vu que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

On a alors aussi, $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$$

$$\parallel$$

$$e^{ia} \cdot e^{ib} = (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b))$$

$$= \cos(a)\cos(b) + i\cos(a)\sin(b) + i\sin(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i(\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b))$$

En égalant les parties réelles et imaginaires, on a que

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$$

On remarque aussi que:

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) - (\cos(a)\sin(-b) + \sin(a)\cos(-b))$$

$$= \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) - (-\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b))$$

$$= 2\cos(a)\sin(b)$$

$$\left(\begin{array}{l}\sin(-x) = -\sin(x) \\ \cos(-x) = \cos(x)\end{array}\right)$$

En prenant $a = kx$, $b = \frac{x}{2}$, on a

$$\sin\left(kx + \frac{x}{2}\right) - \sin\left(kx - \frac{x}{2}\right) = 2\cos(kx)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx) \qquad \square$$

b) Avec le a), on a que $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx) \qquad (a))$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \cos(kx) \qquad \left(\text{si } \sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(-\frac{x}{2}\right)\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

(Série télescopique)

$$\Rightarrow \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) \qquad (\sin(-x) = -\sin(x))$$

$$\Rightarrow 1 + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos(nx) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$\square$

c) On a vu en a) que

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

On a alors que

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) - \left(\cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\sin(-b)\right)$$

$$= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) - \left(\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\right)$$

$$= -2\sin(a)\sin(b)$$

$\begin{pmatrix} \sin(-x) = -\sin(x) \\ \cos(-x) = +\cos x \end{pmatrix}$

En prenant $a = kx$, $b = \frac{x}{2}$, on a donc

$$\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right) = -2\sin(kx)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

d'où $\sin(kx) = \dfrac{\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)}{-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ $\left(\text{si } \sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0\right)$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)}{-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ (Série télescopique)

$$= \frac{\cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)x + \frac{n}{2}x\right) - \cos\left(\frac{n+1}{2}x - \frac{n}{2}x\right)}{-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{-2\sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$\square$

10. Prouvons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

Cas de base : $n = 0, 1$

$$f_0(x) = \cos(0 \arccos(x))$$
$$= \cos(0)$$
$$= 1 \quad \checkmark$$

$$g_0(x) = \frac{\sin(0 \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= 0 \quad \checkmark$$

$$f_1(x) = \cos(\arccos(x))$$
$$= x \qquad \forall x \in [-1, 1] \quad \checkmark$$

$$g_1(x) = \frac{\sin(\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}}{\sqrt{1-x^2}}$$

($\arccos(x) \in [0, \pi]$ $\forall x \in [-1, 1]$ $\Rightarrow \sin(\arccos(x)) \geq 0$ $\forall x \in [-1, 1]$)

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= 1 \qquad \forall x \in [-1, 1] \quad \checkmark$$

Étape de récurrence

Supposons que $f_n(x)$ et $g_n(x)$ soient des polynômes pour un certain $n \in \mathbb{N}$,
On a alors,

$$f_{n+1}(x) = \cos((n+1)\arccos x)$$

$$= \cos(n \arccos x + \arccos x)$$

$$= \cos(n \arccos x)\cos(\arccos x) - \sin(n\arccos(x))\sin(\arccos x)$$

$$= x \cdot f_n(x) - (g_n(x)\sqrt{1-x^2}) \cdot \sqrt{1-x^2} \quad \forall x \in [-1,1]$$

$$= x \cdot f_n(x) - (1-x^2)\, g_n(x)$$

Donc $f_{n+1}(x)$ est bien un polynôme, car c'est un produit et une soustraction de polynômes, par hypothèse de récurrence.

$$g_{n+1}(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\sin(n \arccos x + \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\cos(n\arccos x)\sin(\arccos x) + \sin(n\arccos x)\cos(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{f_n(x)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + g_n(x) \cdot x \quad \forall x \in [-1,1]$$

$$= f_n(x) + x\, g_n(x)$$

Donc $g_{n+1}(x)$ est bien un polynôme aussi par hypothèse de récurrence.

$\square$