TP 6

Examen série #4

On sait que:

$f(0)=0$
f dérivable sur $\mathbb{R}$
$0 < f'(x) \leq 1$ sur $\mathbb{R}$

M.Q. $\int_0^x f^3 \leq \left(\int_0^x f\right)^2$ pour $x \in [0,\infty[$

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \int_0^x f^3 - \left(\int_0^x f\right)^2$$

On veut m.q. $g(x) \leq 0 \ \forall x \in [0,\infty[$

On a que:

$$g(0) = \int_0^0 f^3 - \left(\int_0^0 f\right)^2 = 0.$$

Étudions la dérivée. Puisque f est dérivable, f est continue et donc f^3 aussi. Par le TFC1, on a alors que:

$$g'(x) = \left(\int_0^x f^3\right)' - \left(\left(\int_0^x f\right)^2\right)'$$

$$= f^3(x) - 2\int_0^x f \left(\int_0^x f\right)' \quad \text{(TFC1 + dérivée en chaîne)}$$

$$= f^3(x) - 2\int_0^x f \cdot f(x) \quad \text{(TFC1)}$$

$$= f(x)\left(f^2(x) - 2\int_0^x f\right)$$

Posons $h(x) = f^2(x) - 2\int_0^x f$

On a que:

$h(0) = f^2(0) - 2\int_0^0 f = 0 \qquad (f(0)=0)$

Par le TFCI, on a aussi:

$h'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f(x) \qquad$ (TFCI + dérivée en chaîne)

$\quad = 2f(x)(f'(x) - 1)$

Or, puisque $f(0)=0$ et $f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, on a que $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [0, \infty[$. De plus, on sait que $f'(x) - 1 \leq 0$ par hypothèse, et donc, $\forall x \in [0, \infty[$:

$h'(x) = 2f(x)(f'(x) - 1)$

$\quad \leq 0$

Puisque $h(0) = 0$ et $h'(x) \leq 0 \ \forall x \in [0, \infty[$, on a que $h(x) \leq 0$ $\forall x \in [0, \infty[$.

Retournons à $g'(x)$:

$g'(x) = f(x)\left(f^2(x) - 2\int_0^x f\right)$

$\quad = f(x)\, h(x)$

$\quad \leq 0 \quad$ sur $[0, \infty[$

car $f(x) \geq 0$ et $h(x) \leq 0$ sur $[0, \infty[$.

Puisque $g(0) = 0$ et $g'(x) \leq 0 \ \forall x \in [0, \infty[$, on a que $g(x) \leq 0$ $\forall x \in [0, \infty[$.

Donc, $\forall x \in [0, \infty[$:

$$g(x) = \int_0^x f^3 - \left(\int_0^x f\right)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^x f^3 \leq \left(\int_0^x f\right)^2 \quad \text{sur } x \in [0, \infty[$$

$\square$

<u>Série 4</u>

1. On remarque que :

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$$

$$= \exp\left(\log\left[(1+x)^{1/2}\right]\right) \quad \left((1+x)^{1/2} > 0 \ \forall x > -1\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}\log(1+x)\right)$$

Or, les fonctions $1+x$, $\log x$, $\exp\left(\frac{x}{2}\right)$ sont toutes analytiques, tant que $x > 0$. Puisque la composition de fonctions analytiques est analytique, on a que $\underset{\sqrt{1+x}}{\overset{\shortparallel}{f(x)}} = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(1+x)\right)$ est analytique $\forall x > -1$.

b) On a que $\cos x$, $1-x$, $\frac{1}{x}$ sont analytiques tant que $x \neq 0$.

On a alors que

$$f(x) = \frac{1}{1-\cos x}$$

est analytique si $\cos x \neq 1$, donc si $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) On a que, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$

$$f(x) = x^{\alpha}$$
$$= \exp(\log(x^{\alpha})) \qquad (x>0 \Rightarrow x^{\alpha}>0)$$
$$= \exp(\alpha \log(x))$$

Puisque $\log x$, $\exp(\alpha x)$ sont analytiques $\forall x > 0$ et que la composition de fonctions analytiques est analytique, on a que $f(x) = x^{\alpha}$ est analytique $\forall x > 0$.

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors $f(x)$ est aussi analytique $\forall x \in \mathbb{R}$.

Si $\alpha = -1, -2, \ldots$, alors $f(x) = x^{\alpha}$ est analytique $\forall x \neq 0$, car c'est la composition de $\frac{1}{x}$ et $x^{-\alpha}$, où $-\alpha \in \mathbb{N}$, qui sont analytiques $\forall x \neq 0$.

2.a) On a, par la définition de $\sin x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$= \lim_{x\to 0} 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

$$= 1$$

b) Par définition de $\cos x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}{x^2} \qquad \left(1-\cos x = 1 - 1 + \frac{x^2}{2!} - \ldots\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n)!}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \ldots$$

$$= \frac{1}{2}$$

3. Comme nous l'avons fait dans la série 0 numéro 3 b), on veut dire que :

$$\sin x = x + o(x^2)$$

ou

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

En effet, on a par la définition de $\sin x$ que :

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= x + o(x^2)$$

On a bien que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = o(x^2)$, car

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n+1)!}$$

$$= \lim_{x \to 0} x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n+1)!} = 0 \quad \left(2n-2 \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \right)$$

La preuve est analogue pour $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$.

4. a) On a que f est dérivable $\forall x \neq 0$, car $e^{-1/x}$ et 0 sont des fonctions dérivables $\forall x \neq 0$. En $x=0$, on veut que la dérivée à droite soit égale à la dérivée à gauche.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-1/h}}{h} \qquad (f(0)=0)$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1/h}{e^{1/h}}$$

$$\overset{R.H}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{-1}{h^2 \cdot \frac{-1}{h^2} e^{1/h}} \qquad \left(1/h, e^{1/h} \xrightarrow[h \to 0^+]{} \infty\right)$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{e^{1/h}}$$

$$= 0$$

Les dérivées à droite et à gauche sont bien égales, donc f est dérivable en $x=0$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

Cas de base: $n=1$: Pour $x>0$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x^2}$$

$$= \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} e^{-1/x^2} \qquad \text{avec } P_1(x) = 1,\ Q_1(x) = x^2.$$

Étape de récurrence: Supposons le résultat vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$, montrons le résultat pour $n+1$:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} e^{-1/x}\right)' \quad \text{(hyp. de récurrence)}$$

$$= \left(\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right)' e^{-1/x} + \frac{e^{-1/x}}{x^2} \cdot \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$$

$$= e^{-1/x} \left(\left(\frac{P_n'(x) Q_n(x) - P_n(x) Q_n'(x)}{(Q_n(x))^2} \right) + \frac{P_n(x)}{x^2 Q_n(x)} \right)$$

$$= e^{-1/x} \left(\frac{x^2 (P_n'(x) Q_n(x) - P_n(x) Q_n'(x)) + P_n(x) Q_n(x)}{(Q_n(x))^2 x^2} \right)$$

$$= \frac{P_{n+1}(x)}{Q_{n+1}(x)} e^{-1/x}.$$

$P_{n+1}(x)$, $Q_{n+1}(x)$ sont des polynômes car la dérivée, le produit, la soustraction et l'addition de polynômes est un polynôme.

Donc le résultat est vrai pour $n+1$.

Donc c'est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

Cas de base : $n = 1$

$f'(0) = 0$ (prouvé en a)) ✓

Étape de récurrence : Supposons le résultat vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(h)}{h} \quad \text{(hyp de récurrence)}$$

On a que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f^{(n)}(h)}{h} = 0 \quad (f^{(n)}(x) = 0 \ \forall x < 0)$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f^{(n)}(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{P_n(h)}{Q_n(h)} e^{-1/h}}{h} \quad \text{(b)}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{P_n(h) \, e^{-1/h}}{Q_n(h) \, h}$$

Soit m le degré de $Q_n(x) = a_m x^m + \dots + a_0$, on a alors

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{P_n(h) \, e^{-1/h}}{Q_n(h) \, h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{P_n(h)}{(a_m h^m + \dots + a_0) h \, e^{1/h}}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{P_n(h)}{h^{m+1} \left(a_m + \dots + \frac{a_0}{h^m}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{h}\right)^n}{n!}} \quad (\text{déf } e^{1/h})$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\overset{\to b_0}{P_n(h)}}{\underbrace{\left(a_m + \dots + \frac{a_0}{h^m}\right)}_{\to \infty} \left(\underbrace{\sum_{n=0}^{m+1} \frac{h^{m+1-n}}{n!}}_{\to 0} + \underbrace{\sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{h}\right)^{n-(m+1)}}{n!}}_{\to \infty} \right)}$$

$= 0$

Donc le résultat est vrai pour $n \in I$ aussi

Donc c'est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aussi vrai pour $n=0$ car $f(0)=0$ par déf. $\square$

d) Puisque $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on a donc la série de Taylor de f en 0 est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

qui converge, mais f n'est pas égale à sa série de Taylor en 0

lorsque $x > 0$, donc elle ne peut pas s'écrire comme une

série entière par un corollaire vu en classe.