3. On sait par hypothèse que, $\forall x \in I$,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ t.q. $\forall n \geq N, \sup\limits_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ t.q. $\forall n \geq N, \sup\limits_{x \in I} |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$

On sait de plus que $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq J$, $\forall x \in I$

Montrons que $(f_n g_n)$ conv. unif. vers fg. $\left[\lim\limits_{n} \sup\limits_{x \in I} |f_n g_n(x) - fg(x)| \to 0\right]$

Soit $\varepsilon > 0$,

Soit N_1 t.q. $\forall n \geq N_1, \sup\limits_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2J}$

Soit N_2 t.q. $\forall n \geq N_2, \sup\limits_{x \in I} |g_n(x) - g(x)| < \frac{J\varepsilon}{2JM + \varepsilon}$

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$, on a alors que, $\forall n \geq N$:

$$\sup_{x \in I} |f_n g_n(x) - fg(x)|$$

$$= \sup_{x \in I} |f_n g_n(x) - fg(x) - f_n g(x) + f_n g(x)|$$

$$\leq \sup_{x \in I} \left(|f_n g_n(x) - f_n g(x)| + |f_n g(x) - fg(x)| \right) \quad (\text{Inégalité du triangle})$$

$$\leq \sup_{x \in I} |f_n g_n(x) - f_n g(x)| + \sup_{x \in I} |f_n g(x) - fg(x)| \quad \left(\sup_{x \in I}(f+g) \leq \sup_{x \in I} f + \sup_{x \in I} g\right)$$

$$= \sup_{x \in I} |f_n(x)|\,|g_n(x) - g(x)| + \sup_{x \in I} |g(x)|\,|f_n(x) - f(x)|$$

$$\leq \sup_{x \in I} \left(|f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \right) |g_n(x) - g(x)| + \sup_{x \in I} |g(x)|\,|f_n(x) - f(x)|$$

$$< \sup_{x \in I} \left(M + \frac{\varepsilon}{2J} \right) \left(\frac{J\varepsilon}{2JM + \varepsilon} \right) + \sup_{x \in I} J \, \frac{\varepsilon}{2J}$$

$$= \sup_{x \in I} \left(\frac{\cancel{M2J+\varepsilon}}{2J} \right) \left(\frac{J\varepsilon}{2J\cancel{M+\varepsilon}} \right) + \sup_{x \in I} \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

4. a) On a que si $x=0$, alors $f_n(x) = f_n(0) = 0$

Si $x > \frac{1}{n}$, donc $n > \frac{1}{x}$, alors $f_n(x) = 0$, donc $f_n \to 0$ simplement puisque $\forall x \in [0,1]$, $\lim_{n\to\infty} n > \frac{1}{x}$

b) On a que

$$\int_0^1 f = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{1/n} n^2 x(1-nx)\,dx + \int_{1/n}^1 0\,dx \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{1/n} n^2 x\,dx - \int_0^{1/n} n^3 x^2\,dx \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left[\frac{n^2 x^2}{2} \right]_0^{1/n} - \left[\frac{n^3 x^3}{3} \right]_0^{1/n} \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} - \frac{n^3 \left(\frac{1}{n}\right)^3}{3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

c) Par le b), on voit que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 f$,

Puisque $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions continues sur $[0,1]$, on a nécessairement par la contraposée d'un théorème vu en classe que f_n ne converge pas uniformément.

5\. a) Montrons que $(\tan x)^n \to 0$ uniformément $\forall x \in [0, \pi/6]$.

On a que

$$\sup_{x\in[0,\pi/6]} |f_n(x)|$$

$$= \sup_{x\in[0,\pi/6]} |(\tan(x))^n|$$

On a que

$$f_n'(x) = n(\tan(x))^{n-1} \cdot \sec^2(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, \pi/6].$$

Donc f_n est croissante sur $[0, \pi/6]$.

Donc, on a que:

$$\sup_{x\in[0,\pi/6]} |(\tan(x))^n|$$

$$= |\tan(\pi/6)^n|$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \to 0.$$

Donc $(\tan(x))^n \to 0$ uniformément sur $[0, \pi/6]$

Par un théorème vu en classe, puisque $((\tan(x))^n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions continues sur un intervalle fermé et borné $[0, \pi/6]$ et que $(\tan(x))^n \to 0$ uniformément, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/6} (\tan(x))^n \, dx = \int_0^{\pi/6} 0 \, dx$$

$$= 0.$$

b) Montrons que $\frac{1}{1+y^n} \to 0$ uniformément sur $[2, A]$, pour $A \in (2, \infty)$. Soit $A \in (2, \infty)$. On a que:

$$\sup_{y \in [2,A]} |f_n(y) - 0|$$

$$= \sup_{y \in [2,A]} \left| \frac{1}{1+y^n} \right|$$

On a que

$$f_n'(y) = -(1+y^n)^{-2} \cdot n y^{n-1}$$

$$= \frac{-n y^{n-1}}{(1+y^n)^2} < 0 \quad \forall n \geq 1, \forall y \in [2, A]$$

Donc la fonction $f_n(y)$ est décroissante $\forall y \in [2, A]$. On a alors que

$$\sup_{y\in[2,A]} \left| \frac{1}{1+y^n} \right|$$

$$= \frac{1}{1+2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc $f_n(y) \to 0$ uniformément

Puisque $(f_n(y))_{n}$ est une suite de fonctions continues sur $[2,A]$, où $A\in(2,\infty)$, et que $f_n(y)\to 0$ uniformément, on a vu par un théorème en classe que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^A \frac{1}{1+y^n}\,dy = \int_2^A 0\,dy$$

$$= 0$$

7. Montrons que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)}$ converge uniformément sur $[0,\pi]$.

Notons que $\left|\frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)}\right| \leq \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ $\forall x \in [0,\pi]$

Montrons que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ converge.

On a que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} \quad \text{où } \deg(P(n)) = 0 = k, \ \deg(Q(n)) = 2 = l$$

On voit $l-k=2$, on a vu en analyse 1 que les séries de quotients de polynômes où $l-k \geq 2$ convergent. Donc notre série converge.

Par le critère de Weierstrass, on voit que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)}$ converge uniformément sur $[0,\pi]$.

Puisque $\left(\frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)}\right)_{n\geq 1}$ sont des fonctions continues sur $[0,\pi]$

et que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)}$ converge uniformément sur $[0,\pi]$, on a, par un théorème vu en classe, que:

$$\int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)} \, dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)} \, dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(2nx)}{2n(2n-1)(2n+1)} \right]_0^{\pi}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 0 - 0 = 0.$$

8. On a que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x)$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \sum_{k=1}^{\infty} x^k$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{1-x} \qquad \text{(Série géométrique, } |x| < 1\text{)}$$

$$= \frac{-1}{2}$$

Or, $f(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ ne converge pas, car

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k = -1+1-1+1 \dots -1+1 = 0 \quad \text{et}$$

$$S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k = -1+1-1+1 \dots -1+1-1 = -1. \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque deux sous-suites converge à des valeurs différentes,

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ diverge.

9 a) Posons $f_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$

On a que

$$|f_m(x) - f(x)| = \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2} \right| = \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-m-1}}{n+x^2} \right|$$

Regroupons les termes deux à deux avec $n = m+1+2k$ et $n = m+1+2k+1$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(-1)^{m+1+2k-m-1}}{m+1+2k+x^2} - \frac{(-1)^{m+1+2k+1-m-1}}{m+1+2k+1+x^2}$$

$$= \frac{1}{m+1+2k+x^2} - \frac{1}{m+2+2k+x^2}$$

$$= \frac{1}{(m+1+2k+x^2)(m+2+2k+x^2)}$$

$$\leq \frac{1}{(m+1+2k)(m+2+2k)}$$

$$\leq \frac{1}{(m+2k)^2}$$

$$\leq \frac{1}{(m+k)^2}$$

On a ainsi que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+k)^2} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Puisque cette dernière série est convergente, on a que $\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0$ lorsque $m \to \infty$. Donc $f_n \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

b) O ma que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2} \right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$$

De plus, on sait que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

$\forall n$, $x \in \mathbb{R}$ est fixé on a que

$$\frac{\frac{1}{n+x^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{x^2}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 > 0$$

Par le critère du quotient, on a alors que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$ diverge aussi.

Donc la série ne converge pas absolument.

10) On a que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$

Or, $U_K(x) = \frac{(-1)^{K-1}}{K+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ $(K+x^2 \neq 0 \ \forall K \geq 1)$

$U_K'(x) = (-1)^{K-1} \cdot -1 \, (K+x^2)^{-2} \cdot 2x$

$= \frac{(-1)^K \cdot 2x}{(K+x^2)^2}$ continue $\forall K \geq 1$ (Division de 2 polynômes, $K+x^2 \neq 0 \ \forall K \geq 1$)

Donc $f_n(x) = \sum_{K=1}^{n} U_K(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (n fixé) et f_n' cont car somme de fonc cont.

De plus, par le a), on a que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$,

donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$ converge aussi simplement sur $\mathbb{R}$.

Montrons que, $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \sum_{K=1}^{n} \frac{(-1)^K 2x}{(K+x^2)^2}$ (car n fini)

converge uniformément vers $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2x}{(n+x^2)^2}$ sur $[a,b]$

Soit a,b t.q. $a \leq b$.

Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ défini par

$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2x}{(K+x^2)^2}$

On a que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [a,b]$:

$\left| \frac{(-1)^n 2x}{(n+x^2)^2} \right| \leq \left| \frac{2x}{(n+x^2)^2} \right|$

$\leq \left| \frac{2x}{n^2} \right|$

$$= \frac{2|x|}{n^2}$$

$$\leq \frac{2\,|\max\{|a|,|b|\}|}{n^2}$$

Par le critère de Weierstrass avec $M_n = \frac{2\,|\max\{|a|,|b|\}|}{n^2}$, on a que

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2x}{(n+x^2)^2}$ converge uniformément sur $[a,b]$

Par l'exercice 6, f' existe $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Série 3

4a)

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x} \qquad \left(\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \qquad A(1+x) + B(1-x) \qquad \begin{aligned} A + B &= 1 \\ A - B &= 0 \end{aligned} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^n\right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \qquad \left(1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \right)$$

où $R = 1$ car $|x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$

b) $h(x) = \dfrac{x}{x-1}$

$= -x \cdot \dfrac{1}{1-x}$

$= -x \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} -x^{n+1}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} -x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} -x^n + 1 = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 1$

Done $R = 1$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$$= \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{x}{1-(-x)} - \frac{1}{1-(-x)}$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n + 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot (-1)^{n-1} x^n + 1 = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + 1$$

$a_n = (-1)^n$

$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{(-1)^n} = 1$ $\quad \left(\sqrt[n]{(-1)^n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2k \\ -1 & \text{si } n = 2k+1 \end{cases} \right)$

$\Rightarrow R = 1$

5 b) Supposons qu'il existe une solution de la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{avec } R>0$$

On a alors que, par un théorème vu en classe,

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

On a alors que

$$y'(x) = y(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \forall x \in (-R, R)$$

$$\Rightarrow (n+1) a_{n+1} = a_n \qquad \text{(Corollaire vu en classe)}$$

Or, on a aussi que

$$y(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (0)^n$$

$$= a_0 = 1$$

Donc, on remarque que, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$1 = a_0 = (0+1) a_1$$

$$\Rightarrow a_1 = 1$$

$$1 = a_1 = (1+1) a_2$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = a_2 = (2+1) a_3$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3!}$$

Montrons par récurrence que $a_n = \frac{1}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Cas de base : $n=0$

$a_0 = \frac{1}{0!} = 1$ ✓

Étape d'induction

Supposons que le résultat est vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$, montrons qu'il est vrai pour $n+1$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n!(n+1)} \quad \text{(hyp. d'ind)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}$$

Donc c'est vrai pour $n+1$.

Donc, par récurrence, on a montré que $a_n = \frac{1}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

On a alors que

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Cette série a un rayon de convergence $R = \infty$ (exercice 3), donc il s'agit de la série entière voulue.

$\square$

c) On a donc :

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^4}$$

$$= \int_0^x \frac{dt}{1-(-t^4)}$$

$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t^4)^n \, dt$$ ($|t^4| < 1$, x autour de 0, $R = 1$)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{4n} \, dt$$ (Corollaire vu en classe, $R = 1 > 0$, $-R < 0 < x < R$)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{t^{4n+1}}{4n+1} \right]_0^x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$$