TP4 - Série 2

1. a) Nous avons que, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$-1 \leq \sin(nx) \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{nx} \leq \frac{\sin(nx)}{nx} \leq \frac{1}{nx} \quad !n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{nx} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{nx} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{nx} \leq 0$$

Par le théorème du Sandwich, on a que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{nx} = 0$.

De plus, $f_n(0) = 1 \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

Donc $f_n \to f$ simplement sur $\mathbb{R}$, où $f = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

b) On a que $\forall x \in [1, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n e^{-nx}$$

$$= \lim_{n\to\infty} x^n \cdot (e^{-x})^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} (x e^{-x})^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^n$$

$$= 0 \qquad (\text{car } e^x > x \ \forall x \in [1, \infty))$$

En effet, on a que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{(Série de Taylor)}$$

$$\geq x \quad \text{car } x \geq 1$$

Donc $0 < \frac{x}{e^x} < 1 \quad \forall x \in [1, \infty)$

Donc $f_n \to f$ simplement $\forall x \in [1, \infty)$, où $f(x) \equiv 0$.

c) Posons $g(n) = \tan\left(\frac{x}{n}\right)$ où $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}(2k+1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Montrons que $\lim_{n \to \infty} g(n) = 0$

On veut m.q. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\{\frac{\pi}{2}(2k+1) \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\})$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ t.q. si $n > N$, alors $|g(n)| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. Si $x = 0$, alors $g(n) = \tan\left(\frac{0}{n}\right) = 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$.

Si $x \neq 0$,

Soit $N = \frac{|x|}{\arctan(\varepsilon)} > 0 \quad (\text{car } \varepsilon > 0)$

On a que, $\forall n > N$

$$|g(n)| = \left|\tan\left(\frac{x}{n}\right)\right|$$

$$< \left|\tan\left(\frac{x}{N}\right)\right|$$

$$= \left|\tan\left(\frac{x \arctan(\varepsilon)}{|x|}\right)\right| \quad \text{arctan impaire}$$

$$= \left|\tan(\operatorname{sgn}(x)\arctan(\varepsilon))\right| = \left|\tan\left(\arctan(\operatorname{sgn}(x)\,\varepsilon)\right)\right| = |\varepsilon| = \varepsilon$$

Donc $\lim_{n \to \infty} g(n) = 0$

En effet, arctan est une fonction impaire car on remarque que :

$$(\arctan(-x))' = \frac{-1}{1+x^2} = -(\arctan(x))'$$

$$\Rightarrow \quad \arctan(-x) = -\arctan(x) + C$$

Si $x=0$, alors

$$\arctan(0) = -\arctan(0) + C$$

$\Rightarrow C = 0$

$$\Rightarrow \arctan(-x) = -\arctan(x)$$

Donc $f_n(x) = \tan\left(\frac{x}{n}\right)$ tend simplement vers $f(x) \equiv 0$
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}(2k+1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ $\forall n$, donc $f_n(0) \to f(0) = 0$. simplement.

Donc $f_n \to f$ simplement $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}(2k+1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

2.a) On a que, pour tout $x \in [0, \infty)$:

$$-1 \leq \sin(2nx) \leq 1$$

$$\Rightarrow -e^{-nx} \leq e^{-nx} \sin(2nx) \leq e^{-nx}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} -e^{-nx} \leq \lim_{n\to\infty} e^{-nx} \sin(2nx) \leq \lim_{n\to\infty} e^{-nx}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} e^{-nx} \sin(2nx) \leq 0$$

On a alors que $f(x) \equiv 0$ $\forall x \in [0, \infty)$ est la limite simple de f_n.

Regardons si $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément:

$$\sup_{x \in [0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| =$$

$$= \sup_{x \in [0,\infty)} |e^{-nx} \sin(2nx) - 0|$$

$$= \sup_{x \in [0,\infty)} |e^{-nx} \sin(2nx)|$$

Soit $n \geq 1$,

Regardons les points extrêmaux de $f_n(x)$:

$$f_n'(x) = -n e^{-nx} \sin(2nx) + 2n \cos(2nx) e^{-nx}$$

$$= n e^{-nx} \left(2\cos(2nx) - \sin(2nx) \right)$$

$$= 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos(2nx) = \sin(2nx)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 = \tan(2nx)$$

$$\Leftrightarrow \quad \arctan(2) = 2nx + \pi k$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\arctan(2) - \pi k}{2n} = x_k \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

On a donc

$$f_n(x_k) = e^{-n\left(\frac{\arctan(2) - \pi k}{2n}\right)} \sin\left(2n\left(\frac{\arctan(2) - \pi k}{2n}\right)\right)$$

$$= e^{-\frac{(\arctan(2) - \pi k)}{2}} \sin\left(\arctan(2) - \pi k\right) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

On a alors que, pour $k = 0$,

$$\sup_{x \in [0,\infty)} |f_n(x) - f(x)|$$

$$= \sup_{x \in [0,\infty)} |f_n(x)| \geq \sup_{x \in [0,\infty)} |f_n(x_0)| = e^{-\frac{(\arctan(2))}{2}} \sin(\arctan(2))$$

$$\underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers $f = 0$, et donc (g_n) ne converge pas uniformément. $\square$

b) On a que, $\forall x \in [a, \infty)$, $a > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

$$= 0 \qquad \left(\begin{array}{l} \text{car } 1+x^2 > 1 \quad \forall x \in [a,\infty),\ a>0 \\ \Rightarrow (1+x^2)^n \to \infty \end{array} \right)$$

Donc f_n converge simplement vers f, où $f \equiv 0$ $\forall x \in [a, \infty)$,

où $a > 0$.

Regardons si f_n converge uniformément vers f:

Soit $a > 0$:

$$\sup_{x \in [a,\infty)} |f_n(x) - f(x)|$$

$$= \sup_{x \in [a,\infty)} \left| \frac{1}{(1+x^2)^n} \right|$$

$$= \frac{1}{(1+a^2)^n} \longrightarrow 0 \qquad (1+a^2 > 1 \Rightarrow (1+a^2)^n \to \infty)$$

En effet, $f_n(x)$ est décroissant sur $[a, \infty)$ $\forall n \geq 1$:

$$f_n'(x) = -n(1+x^2)^{-n-1} \cdot 2x$$

$$= \frac{-2xn}{(1+x^2)^{n+1}}$$

$$< 0 \qquad \forall x \in [a, \infty),\ \forall n \geq 1.$$

Donc f_n converge uniformément vers f sur $[a, \infty[$.

c) On a que, si $\sin x = 1$, alors $\cos x = 0$ et $f_n(x) = 0$.

Sinon, on a que, si $\sin x \neq 1$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \sin^n x \cos x$$

$$= 0 \qquad \left(\begin{array}{l} \text{car } \sin x < 1 \\ \text{et } \sin^n x \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty \end{array} \right)$$

Donc f_n converge simplement vers f, où $f = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Regardons si f converge uniformément vers f:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sin^n x \cos x|$$

On a que

$$f_n'(x) = n \sin^{n-1} x \cos^2 x - \sin^{n+1} x$$

$$= (\sin x)^{n-1} (n \cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= (\sin x)^{n-1} (n \cos^2 x - (1 - \cos^2 x))$$

$$= (\sin x)^{n-1} ((n+1) \cos^2 x - 1)$$

Analysons la fonction sur $[0, 2\pi]$, car la fonction est 2π-périodique :

$(n+1)\cos^2 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (n+1)\cos^2 x = 1$

$\Rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \quad \cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{n+1}}$

$\Rightarrow \quad x = \arccos\left(\pm\sqrt{\frac{1}{n+1}}\right)$

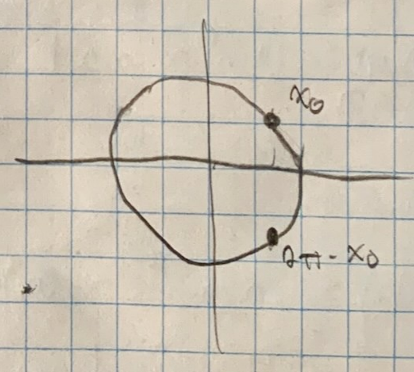
$\sin^{n-1} x = 0$

$\Rightarrow \quad \sin x = 0$

$\Rightarrow \quad x \in \{0, \pi, 2\pi\}$

On a donc les points critiques suivants.

$x_0 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$



$x_1 = 2\pi - x_0$

$x_2 = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

$x_3 = 2\pi - x_2$

$x_4 = 0$

$x_5 = \pi$

$x_6 = 2\pi$

On a donc $f_n(x_4) = f_n(x_5) = f_n(x_6) = 0$ et

$$f_n(x_0) = \sin^n\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right)\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right)$$

$$= \sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right)}^{\,n}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$= \left(\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right) \geq 0$

car $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \in [0,\pi]$

Donc on peut prendre la racine positive

$= f_n(x_1) \cdot (-1)^n$

$= -f_n(x_2)$

$= -f_n(x_3) \cdot (-1)^n$

Ces derniers points sont les maximums ou minimums, donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = |f_n(x_0)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$