TP3 - Serie 1

8 b) $\int \log x \, dx$

$= x \log x - \int x \frac{1}{x} dx$ $\qquad u = \log x \quad dv = dx$

$du = \frac{1}{x} dx \quad v = x$

$= x \log x - x + C, \quad C \in \mathbb{R}$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2-3x+2}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(4x^2+3x+\frac{9}{16}\right)+\frac{41}{16}}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{41}{16}}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{41}{16}}\sqrt{1-\left(\frac{2x+\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{41}{16}}}\right)^2}}$

$u = \frac{2x+3/4}{\sqrt{\frac{41}{16}}}$

$= \int \frac{1}{2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

$du = \frac{2}{\sqrt{\frac{41}{16}}} dx$

$= \frac{1}{2} \arcsin(u) + C$

$$= \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2x + 3/4}{\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{16}}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{8x + 3}{\sqrt{41}}\right) + C$$

d) $\int \frac{x^5}{x^3-1}$

$$= \int \frac{1}{3} \frac{(u+1)}{u}\, du \qquad u = x^3-1 \quad \Rightarrow \quad u+1 = x^3$$
$$du = 3x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \left(1 + \frac{1}{u}\right) du$$

$$= \frac{1}{3} \left(u + \ln|u|\right) + C$$

$$= \frac{1}{3} \left((x^3-1) + \ln|x^3-1|\right) + C$$

e) $\int \frac{dt}{2\sin^2 t + 3\cos^2 t}$

$$= \int \frac{\sec^2 t\, dt}{2\tan^2 t + 3}$$ (Diviser par $\cos^2 t$ en haut et en bas)

$$= \int \frac{du}{2u^2+3}$$

$u = \tan t$
$du = \sec^2 t \, dt$

$$= \int \frac{du}{3\left(\frac{2u^2}{3}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\left(\frac{\sqrt{2}u}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{dw}{w^2+1}$$

$w = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} u$

$dw = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} du$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \arctan(w) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} u\right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \tan t\right) + C$$

f) $\int x \arctan x \, dx$

$= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ $\quad u = \arctan x \quad dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{1+x^2} dx \quad v = \frac{x^2}{2}$

$= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \left(\int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx \right)$

$= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \left(x - \arctan x \right) + C$

$= \frac{1}{2} \left(x^2 \arctan x - x + \arctan x \right) + C$

g) $\int \frac{du}{1+u^3}$

$= \int \frac{du}{(1+u)(u^2-u+1)}$

$\Rightarrow \frac{1}{(1+u)(u^2-u+1)} = \frac{A}{(1+u)} + \frac{Bu+C}{u^2-u+1}$

$\Rightarrow \quad 1 = A(u^2-u+1) + (Bu+C)(1+u)$

$\Rightarrow \quad 1 = Au^2 - Au + A + Bu^2 + Bu + C + Cu$

$\Rightarrow \quad 1 = (A+B)u^2 + (B+C-A)u + A + C$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B = 0 \\ -A+B+C = 0 \\ A+C = 1 \end{cases}$

$\searrow \ldots$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 - L_1 \to L_3}{\overset{L_2 + L_1 \to L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_3 + \frac{1}{2}L_2 \to L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{2/3 L_3 \to L_3}{\overset{1/2 L_2 \to L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 - 1/2 L_3 \to L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_1 - L_2 \to L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right)$$

On a donc que $A = 1/3$, $B = -1/3$, $C = 2/3$ et donc

$$\frac{1}{(1+u)(u^2-u+1)} = \frac{1}{3(1+u)} + \frac{-1/3 \cdot u + 2/3}{u^2-u+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{1+u^3}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u} - \frac{1}{3}\int \frac{(u-2)}{u^2-u+1}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\ln|1+u| - \frac{1}{3}\left(\int \frac{u-1/2}{u^2-u+1}\,du - \frac{3}{2}\int \frac{du}{u^2-u+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\ln|1+u| - \frac{1}{6}\int \frac{dw}{w} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2-u+1}$$

$w = u^2 - u + 1$
$\frac{dw}{du} = 2u - 1$

$$= \frac{1}{3}\ln|u+1| - \frac{1}{6}\ln|u^2-u+1| + \frac{1}{2}\int \frac{du}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|u+1| - \frac{1}{6}\ln|u^2-u+1| + \frac{1}{2}\int \frac{du}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{u-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1\right)}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|u+1| - \frac{1}{6}\ln|u^2-u+1| + \frac{2}{3}\int \sqrt{\frac{3}{4}}\,\frac{dw}{w^2+1} \qquad w = \frac{u-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|u+1| - \frac{1}{6}\ln|u^2-u+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(w) + C \qquad dw = \frac{du}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|u+1| - \frac{1}{6}\ln|u^2-u+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

9 a) $\int_0^1 (x+\sqrt{x})\,dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

b) $\int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{x^{1/3}}\right) dx$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^{2/3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{11}{6}$$

c) $\int_e^{e^2} \frac{dt}{t \log^3 t}$

$= \int_1^2 \frac{du}{u^3}$

$u = \log t$ $\quad$ $u(e) = \log(e) = 1$

$du = \frac{1}{t}\, dt$ $\quad$ $u(e^2) = \log(e^2) = 2$

$= \left[\frac{1}{-2u^2}\right]_1^2$

$= \frac{-1}{2(2)^2} + \frac{1}{2(1)^2}$

$= \frac{-1}{8} + \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{8}$

d) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$

$= \int_0^1 \frac{x\, dx}{(x+1)(x^3 + x^2 + x + 1)}$

$= \int_0^1 \frac{x\, dx}{(x+1)^2 (x^2+1)}$

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 & x+1 \\
\underline{-(x^4 + x^3)} & x^3 + x^2 + x + 1 \\
\quad x^3 + 2x^2 & \\
\underline{\quad -(x^3 + x^2)} & \\
\qquad x^2 + 2x & \\
\underline{\qquad -(x^2 + x)} & \\
\qquad\quad x + 1 & \\
\underline{\qquad\quad -(x+1)} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$$= \int_0^1 \frac{x\,dx}{(x+1)^2\,(x^2+1)}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2+x+1 & x+1 \\ \hline -(x^3+x^2) & x^2+1 \\ \quad 0 \quad x+1 & \\ \quad -(x+1) & \\ \quad\quad 0 & \end{array}$$

$$-1) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2}$$ (Frac. partielles)

$$= \left[\frac{1}{2}\arctan(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{\arctan(1)}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

e) $$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$x = 2\sin(u)$
$u = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$
$dx = 2\cos(u)\,du$

$u(2) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$
$u(0) = \arcsin(0) = 0$

$$= \int_0^{\pi/2} 4\sin^2(u)\sqrt{4-4\sin^2(u)}\cdot 2\cos(u)\,du$$

$$= \int_0^{\pi/2} 4\sin^2(u)\,2|\cos(u)|\cdot 2\cos(u)\,du$$

$$= 16\int_0^{\pi/2} \sin^2(u)\cdot\cos^2(u)\,du$$ ($u \in [0, \pi/2]$, $\cos(u) \geq 0$.)

$$= 16\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(4u)}{8}\,du$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} du - 2\int_0^{\pi/2} \cos(4u)\,du$$

$$= 2\left[v\right]_0^{\pi/2} - 2\left[\frac{\sin(4v)}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \pi$$

f) $$\int_1^2 \frac{ds}{s^2\sqrt{1+s^2}}$$

$$= \int_{\pi/4}^{\arctan(2)} \frac{\sec^2(v)\,dv}{\tan^2(v)\sqrt{1+\tan^2 v}}$$

$s = \tan(v)$ $\Rightarrow$ $v = \arctan(s)$

$ds = \sec^2(v)\,dv$

$v(1) = \arctan(1) = \pi/4$

$v(2) = \arctan(2)$

$$= \int_{\pi/4}^{\arctan(2)} \frac{\sec^2(v)\,dv}{\tan^2(v)\,|\sec(v)|}$$

$$= \int_{\pi/4}^{\arctan(2)} \frac{\sec(v)\,dv}{\tan^2(v)}$$

$(\sec(v) \geq 0 \quad \forall\, v \in [\pi/4, \arctan(2)])$

$$= \int_{\pi/4}^{\arctan(2)} \frac{\cos(v)}{\sin^2(v)}\,dv$$

$$= \int_{\sqrt{2}/2}^{2/\sqrt{5}} \frac{1}{w^2}\,dw$$

$w = \sin(v)$

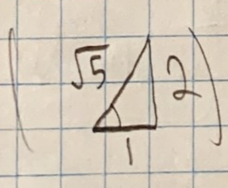
$dw = \cos(v)\,dv$

$w(\pi/4) = \sqrt{2}/2$

$w(\arctan(2)) = \sin(\arctan(2))$

$= \frac{2}{\sqrt{2^2+1}}$

$= \frac{2}{\sqrt{5}}$



$$= \left[\frac{-1}{w}\right]_{\sqrt{2}/2}^{2/\sqrt{5}}$$

$$= \frac{-\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

TP 3

11. a) On a que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2} + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$$

ce qui converge si et seulement si $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$, puisque $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

$\leq \int_0^1 1\,dx = 1$

Pour tout $x \geq 1$, on a que

$$x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq -x$$

$$\Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x} \quad \text{(exp est croissante)}$$

On a aussi que

$$\lim_{M\to\infty}\int_1^M e^{-x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} -e^{-M} + e^{-1}$$

$$= e^{-1}$$

On a alors que

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^\infty e^{-x}\,dx < \infty$$

Donc l'intégrale de base converge.

b) On a que

$$\lim_{M\to\infty} \int_0^M \sin(t)\,dt = \lim_{M\to\infty} [-\cos(M)]_0^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} -\cos(M) + \cos(0)$$

cette limite diverge (exercice d'Analyse 1)

Donc l'intégrale diverge.

c) On a que

$$\frac{\sin x}{1+\cos x+e^x} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

On a aussi que $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ converge

On a donc que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\cos x+1+e^x}\,dx \leq \int_0^\infty e^{-x}\,dx < \infty.$$

d) On remarque que le dénominateur est non nulle $\forall x \in \mathbb{R}$,

donc le seul problème potentiel peut se trouver à l'infini.

Regardons l'intégrale sur l'intervalle $[1,\infty)$, car l'intégrande est

intégrable sur $[0,1]$ (la fonction est continue sur $[0,1]$).

Pour $x \geq 1$, on a que

$$\frac{\cos(mx)}{a^2+x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall a \neq 0,\ m \in \mathbb{N}^*$$

On a de plus que:

$$\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^2} = \lim_{M\to\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{-1}{M} + 1$$

$$= 1$$

On a alors que

$$\int_1^M \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}\,dx \leq \int_1^M \frac{dx}{x^2} = 1$$

Donc l'intégrale de départ converge aussi.

e) On a que

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{e^x-1}\,dx + \int_1^\infty \frac{x}{e^x-1}\,dx$$

Étudions les deux intégrales:

Sur $[1,\infty)$, on a que $x^2 \leq e^x$ (montrez-le !), on a donc que $x \leq e^{x/2}$ ($\sqrt{\cdot}$ est une fonction croissante) et donc:

$$\frac{x}{e^x-1} \leq \frac{e^{x/2}}{e^x - \frac{e^x}{2}} \qquad \left(1 \leq e^{x/2} \quad \forall x \in [1,\infty)\right)$$

$$= 2e^{-x/2}$$

Or, on a que

$$\lim_{M\to\infty} \int_1^M 2e^{-x/2}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_{1/2}^{M} 4e^{-u}\, du \qquad u = \frac{x}{2} \qquad u(1) = 0.5$$

$$du = \frac{dx}{2} \qquad \lim_{M\to\infty} u(M) = \infty$$

$$= 4 \lim_{M\to\infty} \left[-e^{-u}\right]_{1/2}^{M}$$

$$= 4 \lim_{M\to\infty} -e^{-M} + e^{-1/2}$$

$$= 4e^{-1/2}$$

Donc l'intégrale converge et

$$\int_1^\infty \frac{x}{e^x - 1}\, dx \leq \int_1^\infty 2e^{-x/2}\, dx < \infty.$$

Sur $[0,1)$, on remarque que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{(1 + x + o(x)) - 1} \quad \text{(développement limité de } e^x\text{)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x + o(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1 + o(1)} = 1$$

On peut alors prolonger la fonction $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ comme une fonction continue sur $[0,1]$, et donc intégrable.

L'intégrale de base converge alors.

En effet, si $f(x) = o(x)$, alors on sait par définition que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$$

On remarque alors que $\frac{f(x)}{x} = o(1)$, car

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)/x}{1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0 \qquad (\text{car } f(x) = o(x))$$

Donc $\frac{o(x)}{x} = o(1)$.

f) La fonction est continue sur $[-1, 1[$, donc étudions l'intégrale sur $[1/2, 1[$

Pour $1/2 \leq x \leq 1$, on a que:

$$\frac{x\sqrt{x+1}}{1-x} \geq \frac{1/2\sqrt{1/2+1}}{1-x}$$

On a de plus que:

$$\lim_{y\to 1^-} \int_{1/2}^{y} \frac{dx}{1-x} = \lim_{y\to 1^-} \Big[-\ln(1-x)\Big]_{1/2}^{y}$$

$$= \lim_{y\to 1^-} -\ln(1-y) + \ln(1/2)$$

$$= \infty$$

On a alors que:

$$\int_{1/2}^{1} \frac{x\sqrt{x+1}}{1-x}\,dx \geq \sqrt{\frac{3}{8}} \int_{1/2}^{1} \frac{dx}{1-x} = \infty$$

Donc l'intégrale diverge, donc $\int_{-1}^{1} \frac{x\sqrt{x+1}}{1-x}\,dx$ aussi.

1.2. a) Étudions l'intégrale sur $[0,1]$. On a que

$$\int_0^1 \frac{\log|x|}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{\log x}{x}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\log(\varepsilon)}^0 u\,du \qquad \begin{array}{ll} u = \log x & u(\varepsilon) = \log(\varepsilon) \\ du = \frac{dx}{x} & u(1) = 0 \end{array}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{u^2}{2}\right]_{\log(\varepsilon)}^0$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\frac{(\log \varepsilon)^2}{2}$$

$$= -\infty$$

Donc l'intégrale diverge.

Cependant, on remarque que $f(x) = \frac{\log|x|}{x}$ est une fonction impaire, car

$$f(-x) = \frac{\log|-x|}{-x} = -\frac{\log|x|}{x} = -f(x).$$

On a alors que la valeur principale est 0, puisque nous avons l'intégrale d'une fonction impaire sur $[-1,1]$.

b) Étudions l'intégrale sur $[0, \pi/2]$. On a que

$$\int_0^{\pi/2} \tan x \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \tan x \, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big[-\ln|\cos(x)| \Big]_0^{\pi/2-\varepsilon} \qquad (8a))$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\ln|\cos(\pi/2-\varepsilon)| + \cancel{\ln|\cos(0)|}$$

$$= \infty$$

Donc l'intégrale diverge.

On remarque par contre que

$$\int_0^{\pi/2} \tan x \, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(u+\pi/2) \, du \qquad \begin{array}{l} u = x - \pi/2 \\ du = dx \end{array} \qquad \begin{array}{l} u(\pi) = \pi/2 \\ u(0) = -\pi/2 \end{array}$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(u+\pi/2)}{\cos(u+\pi/2)} \, du$$

Or, on a que $f(x) = \tan(x+\pi/2)$ est impaire :

$$f(-x) = \tan(-x+\pi/2)$$

$$= \frac{\sin(-x+\pi/2)}{\cos(-x+\pi/2)}$$

$$= -\frac{\sin(x+\pi/2)}{\cos(x+\pi/2)} \qquad \text{(Preuve similaire au 10c) i))}$$

$$= -f(x)$$

On a donc l'intégrale d'une fonction impaire sur $[-\pi/2, \pi/2]$, donc la valeur principale est nulle.

c) Calculons l'intégrale impropre :

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$u = \sqrt{x^2-1}$

$du = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\sqrt{(1+\varepsilon)^2-1}}^{\sqrt{3}} du$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[u\right]_{\sqrt{(1+\varepsilon)^2-1}}^{\sqrt{3}}$$

$u(2) = \sqrt{3}$

$u(1+\varepsilon) = \sqrt{(1+\varepsilon)^2-1}$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sqrt{3} - \sqrt{(1+\varepsilon)^2-1}$$

$$= \sqrt{3}$$

Donc l'intégrale impropre converge et vaut $\sqrt{3}$.

13 a) Séparons l'intégrale sur $[0,1)$ et $[1,\infty)$

Montrons que, $\forall x \in [1,\infty)$, $\exists T \in \mathbb{R}$ tq $\forall t \geq T$ $t^{x-1}e^{-t} \leq e^{-t/2}$

- Pour ça, on peut montrer que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{e^{-t/2}} = 0$$

Comme ça, nous pourrons séparer notre intégrale entre $[1,T]$ et $[T,\infty)$, et l'intégrale sur un domaine compact d'une fonction continue est convergente.

On a que, pour $x>0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{e^{-t/2}}$$

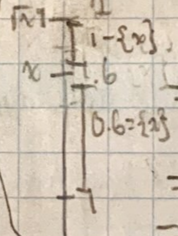
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{x-1}}{e^{t/2}}$$

Appliquons la règle de l'hôpital $\lceil x\rceil - 1$ fois puisque $t^{y} \to \infty$ et $e^{t} \to \infty$ lorsque $t\to\infty$ et $y>0$.

Si $x \in \mathbb{N}$, alors :

$$= \dots$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(x-1)(x-2)\dots(2)(1)}{e^{t}} = 0$$



$$(x-1)-(\lceil x\rceil-1)$$
$$= x-\lceil x\rceil$$
$$= \lceil x\rceil-(1-\{x\})-\lceil x\rceil$$
$$= -1+\{x\}$$

Si $x \notin \mathbb{N}$, $x>0$, alors :

$$= \dots$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(x-1)(x-2)\dots\{x\}\,t^{-1+\{x\}}}{e^{t}} = 0$$

(car $\{x\}-1<0$. $\forall x>0$.)

On a alors que $\forall x>0$, $\exists T \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall t \geq T$,

$$t^{x-1}e^{-t} \leq e^{-t/2}$$

On a alors que

$$\int_1^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = \int_1^{T} t^{x-1}e^{-t}\,dt + \int_T^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

$$= C + \int_T^{\infty} e^{-t/2}\, dt$$

(La première intégrale converge vers $C \in \mathbb{R}$ puisqu'il s'agit de l'intégrale sur un domaine compact d'une fonction continue.)

$$= C + \lim_{M \to \infty} \int_T^{M} e^{-t/2}\, dt$$

$$= C + \lim_{M \to \infty} \left[-2e^{-t/2} \right]_T^M$$

$$= C + \lim_{M \to \infty} -2e^{-M/2} + 2e^{-T/2}$$

$$= C + 0 + 2e^{-T/2} < \infty \quad (\text{car } T \in \mathbb{R} \text{ est fixé})$$

Donc l'intégrale $\int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$ converge $\forall x > 0$.

Il reste donc à montrer que $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt$ converge aussi.

Si $x \geq 1$, alors ça converge puisque la fonction est continue sur $[0,1]$.

Si $x \in (0,1)$, $t \in [0,1]$, alors $t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1}$ et donc, par une prop. de l'intégrale :

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} \, dt \leq \int_0^1 t^{x-1} \, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{t^{1-x}} \, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{t^x}{x} \right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{x} < \infty \quad \left(\begin{array}{l} 1-x \neq -1, \; x \in (0,1) \\ \text{fixé} \end{array} \right)$$

Donc $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} \, dt$ converge $\forall x > 0$ et donc $\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt$ conv. aussi.

b) Intégrons $\Gamma(x)$ par partie, où $x > 1$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt \qquad \begin{array}{ll} u = t^{x-1} & dv = e^{-t} dt \\ du = (x-1) t^{x-2} dt & v = -e^{-t} \end{array}$$

$$= \lim_{M \to \infty} \int_0^M t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

$$= \lim_{M \to \infty} \left[-t^{x-1} e^{-t} \right]_0^M + \int_0^M (x-1) t^{x-2} e^{-t} \, dt$$

$$= \lim_{M \to \infty} -M^{x-1} e^{-M} + 0 + (x-1) \, \Gamma(x-1) \quad \left(\text{déf } \Gamma(x) \right)$$

$= 0 + (x-1)\,\Gamma(x-1)$ (Règle de l'Hopital)

(où $x-1>0$, donc $\Gamma(x-1)$ est bien définie)

c) Prouvons par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ que $\Gamma(n) = (n-1)!$

<u>Cas de base</u> : $n=1$,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t}\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t}\, dt$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-t}\, dt$$

$$= \lim_{M\to\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} -e^{-M} + e^0$$

$$= 1 = 0! \;\checkmark$$

<u>Cas d'induction</u> :

Supposons que $\Gamma(n) = n-1!$

Montrons que $\Gamma(n+1) = n!$

On a que

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) \quad \text{(b)} \quad (n>0)$$

$$= n\cdot(n-1)! \quad \text{(Hyp. d'ind)}$$

$$= n! \quad \text{(Déf factorielle)}$$

Nous avons donc montré par récurrence que $\Gamma(n) = (n-1)!$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\square$

d) On peut définir Γ sur $\{x<0\} \setminus \{-1,-2,\dots\}$ en définissant

$$\Gamma(x) := \frac{\Gamma(x+1)}{x} \qquad \text{(vrai par b))}$$

ce qui sera bien défini sur $\{x<0\} \setminus \{-1,-2,\dots\}$, puisque $\Gamma(x)$ est déjà défini $\forall x>0$. On ne peut pas utiliser cette définition pour $x = -1, -2, \dots$, car il faudrait évaluer $\Gamma(0)$, ce qui n'a pas été défini.

e) On a donc:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{1/2-1} e^{-t}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$$

$$= \int_0^\infty 2 e^{-x^2}\, dx \qquad \begin{array}{l} x = \sqrt{t} \\ dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt \end{array} \qquad \begin{array}{l} x(M) = \sqrt{M} \xrightarrow[M\to\infty]{} \infty \\ x(0) = 0 \end{array}$$

$$= \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx \qquad (e^{-x^2} \text{ est une fonction paire})$$

On obtient alors la fameuse intégrale de Gauss.