Soit $\varepsilon > 0$

7. Sous ces hypothèses, on sait que $S_n \to f$ unif., où

S_n est la somme partielle de la série de fourier de f.

Par définition, pour $\varepsilon' = 1$, $\exists N$ t.q. $\forall n \geq N$, on a

$$|S_n - f| < 1$$

$$\Rightarrow \quad |S_n - f|^2 < |S_n - f| < 1$$

Donc $(S_n - f)^2 \to 0$ uniformément sur $[-\pi, \pi]$.

Alors, pour $\varepsilon' = \varepsilon > 0$, $\exists N$ t.q.

$$(S_N - f)^2 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} (S_N - f)^2 < \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon = 2\pi\varepsilon \qquad ((S_N - f)^2 \text{ est cont.})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (S_N - f)^2 < \varepsilon$$

ce qu'on voulait

$\square$

2. a) Avec les hypothèses, on a vu que $S_n \to f$ uniformément.

Soit $\varepsilon = 1$, $\exists N \geq 0$ $\forall n \geq N$, on a

vrai si. f est $\overset{\text{cont}^t +}{\text{}}$ régulière par morceaux avec $f(-\pi) = f(\pi)$

$|S_n - f| < 1$

et $(S_n - f)^2 < |S_n - f| < 1$

Donc $(S_n - f)^2 \to 0$ uniformément sur $[-\pi, \pi]$. Par un autre théorème vu en classe, on a alors que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (S_n - f)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 0 = 0$$

b) Calculons tout d'abord une intégrale :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx} \sum_{|m| \leq n} c_m e^{imx} \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|k| \leq n} \sum_{|m| \leq n} c_k c_m e^{i(k+m)x} \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n} \sum_{|m| \leq n} c_k c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k+m)x} \, dx$$ somme finie

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq -k \\ 2\pi & \text{si } m = -k \end{cases}$$

$$= \sum_{|k| \leq n} c_k c_{-k}$$

$$= \sum_{|k| \leq n} |c_k|^2$$

On a alors que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f-S_n)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2-2fS_n+S_n^2$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_n^2 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2(S_n^2-S_nf)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 - \sum_{|k|\leq n}|c_k|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2S_n(S_n-f)$$

En faisant tendre $n\to\infty$, on a :

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 - \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2 + 0 \quad \left(\begin{array}{l} S_n \to f \text{ unif.} \\ \Rightarrow 2S_n(S_n-f)\to 2f(f-f)=0 \text{ unif.}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2$$

$\square$

Corrigé Devoir 2

1a) Soit $h(x) = \dfrac{C + \int_a^x fg}{\exp\left(\int_a^x g\right)}$

On a que $h(a) = \dfrac{C + 0}{\exp(0)} = C$

Montrons que h est décroissante, par le TFC1, puisque fg est cont., car f, g le sont, on a que:

$$h'(x) = \frac{f(x)g(x)\exp\left(\int_a^x g\right) - \left(C + \int_a^x fg\right)\exp\left(\int_a^x g\right) g(x)}{\exp\left(\int_a^x g\right)^2}$$

$$= \frac{g(x)\left(f(x) - C - \int_a^x fg\right)}{\exp\left(\int_a^x g\right)}$$

$$\leq 0 \qquad \left(\begin{array}{l} g(x) \geq 0 \ \forall x, \\ f(x) \leq C + \int_a^x fg \text{ par hyp.} \end{array}\right)$$

On a donc que h est décroissante et $h(a) = C$, donc $h(x) \leq C \ \forall x \geq a$:

$$\frac{C + \int_a^x fg}{\exp\left(\int_a^x g\right)} \leq C$$

$\Rightarrow f(x) \leq C + \int_a^x fg \leq C \exp\left(\int_a^x g\right)$ $\square$

b) On a donc

$$\varphi'(x) \leq h(x)\varphi(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^x \varphi'(t) \leq \int_a^x h(t)\varphi(t)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \leq \int_a^x h(t)\varphi(t) \qquad (\text{TFCI}, \varphi' \text{ cont})$$

On a alors prouvé en a), avec $C = 0$, que

$$\varphi(x) \leq 0 \cdot \exp\left(\int_a^x h\right) = 0$$

Par hyp., on a aussi que $\varphi(x) \geq 0$, donc $\varphi(x) = 0$ $\forall x \in [a, b]$.

2 a) Regardons l'intégrale suivante

$$\int_a^b g(x) e^{i\lambda x}\, dx$$

$$= \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\pi/\lambda} g\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right)}\, du$$

$u = x - \frac{\pi}{\lambda}$

$du = dx$

$u(a) = a - \frac{\pi}{\lambda}$, $u(b) = b - \frac{\pi}{\lambda}$

$\int_b$

$$= \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g\left(u+\frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda\pi} e^{i\lambda u}\, du$$

$$= -\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\pi/\lambda} g\left(u+\frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda u}\, du$$

$$= -\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\pi/\lambda} g\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda x}\, dx$$

On a alors que

$$\int_a^b g(x) e^{i\lambda x} dx + \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\pi/\lambda} g\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda x}\, dx = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_a^b g(x) e^{i\lambda x}\, dx + \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\pi/\lambda} g\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda x}\, dx\right) = 0$$

Montrons alors que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b g(x) e^{i\lambda x}\, dx - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\pi/\lambda} g\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda x}\, dx = 0$$

Car on aura alors, en additionnant les deux égalités :

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b g(x) e^{i\lambda x}\, dx = 0$$

$\Rightarrow \lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b g(x) \cos(\lambda x)\, dx + i \int_a^b g(x) \sin(\lambda x)\, dx = 0 + 0i$

$\Rightarrow \lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b g(x) \cos(\lambda x)\, dx = 0$

et $\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b g(x) \sin(\lambda x)\, dx = 0$

(Possible d'appliquer les limites ainsi car toutes les intégrales en valeur absolue sont $\leq \int_a^b |g|$, qui converge.)

Soit $\varepsilon > 0$.

Premièrement, on remarque que, pour $\delta > 0$:

$$\int_a^b |g| = \int_a^{b-\delta} |g| + \int_{b-\delta}^b |g|$$

$$\Rightarrow \int_{b-\delta}^b |g| = \int_a^b |g| - \int_a^{b-\delta} |g|$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta \to 0^+} \int_{b-\delta}^b |g| = \int_a^b |g| - \int_a^b |g| = 0 \quad \left(\text{car } \int_a^b |g| \in \mathbb{R} \text{ conv.}\right)$$

Par définition de limite, $\exists\, \delta_1 > 0$ t.q.

$$\int_a^{a+2\delta_1} |g| < \frac{\varepsilon}{6} \quad \text{et} \quad \int_{b-2\delta_1}^b |g| < \frac{\varepsilon}{6}$$

De plus, $\forall \varepsilon' > 0$, on sait que g est uniformément cont. sur $[a+\varepsilon', b-\varepsilon']$ (continuité sur un compact).

On a alors que $\exists \delta_2 > 0$ t.q. $\forall x, y \in \left[a+\frac{\delta_1}{2}, b-\frac{\delta_1}{2}\right]$, on a que

$$|x-y| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

On prend $\frac{\delta_1}{2}$ dans l'ensemble pour s'assurer que

$$x \in [a+\delta_1, b-\delta_1] \Rightarrow x+\frac{\pi}{\lambda} \in \left[a+\frac{\delta_1}{2}, b-\frac{\delta_1}{2}\right]$$

lorsque λ est assez grand. (donc que x, $x+\frac{\pi}{\lambda} \in \left[a+\frac{\delta_1}{2}, b-\frac{\delta_1}{2}\right]$)

On prend λ assez grand pour que $a < b-\frac{\pi}{\lambda}$ et $\frac{\pi}{\lambda} < \left\{\frac{\delta_1}{2}, \delta_2\right\}$.

Regardons les intégrales:

$$\left| \int_a^b g(x) e^{i\lambda x} dx - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\pi/\lambda} g\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda x} dx \right|$$

$$= \left| \int_a^{a+\delta_1} g(x) e^{i\lambda x} dx + \int_{a+\delta_1}^{b-\delta_1} g(x) e^{i\lambda x} dx + \int_{b-\delta_1}^{b} g(x) e^{i\lambda x} dx \right.$$

$$\left. - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a+\delta_1} g\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda x} dx - \int_{a+\delta_1}^{b-\delta_1} g(x) e^{i\lambda x} dx - \int_{b-\delta_1}^{b-\pi/\lambda} g\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda x} dx \right|$$

$$\leq \underbrace{\left| \int_a^{a+\delta_1} g(x) e^{i\lambda x} dx \right|}_{1} + \underbrace{\int_{a-\delta_1}^{b-\delta} \left| g\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) - g(x) \right| dx}_{5}$$

$$+ \underbrace{\left| \int_{b-\delta_1}^{b} g(x) e^{i\lambda x} dx \right|}_{2} + \underbrace{\left| \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a+\delta_1} g\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda x} dx \right|}_{3} + \underbrace{\left| \int_{b-\delta_1}^{b-\pi/\lambda} g\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda x} dx \right|}_{4}$$

(Inégalité du triangle pour nombre réels et intégrales, $|e^{i\lambda x}| = 1 \quad \forall \lambda, x \in \mathbb{R}$)

Bornons chaque intégrale:

1) $$\left| \int_a^{a+\delta_1} g(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \int_a^{a+\delta_1} |g|$$

$$\leq \int_a^{a+2\delta_1} |g| < \frac{\varepsilon}{6} \qquad (|g| \geq 0)$$

2) $\left| \int_{b-\delta_1}^{b} g(x)\, e^{i\lambda x}\, dx \right|$

$$\leq \int_{b-\delta_1}^{b} |g| \leq \int_{b-2\delta_1}^{b} |g| < \frac{\varepsilon}{6}$$

3) $\left| \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a+\delta_1} g\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda x}\, dx \right|$

$$\leq \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a+\delta_1} \left| g\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) \right|$$

$$= \int_{a}^{a+\delta_1+\pi/\lambda} |g|$$

$$\leq \int_{a}^{a+2\delta_1} |g| < \frac{\varepsilon}{6}$$

4) $\left| \int_{b-\delta_1}^{b-\pi/\lambda} g\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda x}\, dx \right|$

$$\leq \int_{b-\delta_1}^{b-\pi/\lambda} \left| g\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) \right| dx$$

$$= \int_{b-\delta_1+\frac{\pi}{\lambda}}^{b} |g| \leq \int_{b-2\delta_1}^{b} |g| < \frac{\varepsilon}{6}$$

5) $$\int_{a+\delta_1}^{b-\delta_1} \left|g\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) - g(x)\right| dx$$

$$< \int_{a+\delta_1}^{b-\delta_1} \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \, dx \qquad \left(x+\frac{\pi}{\lambda},\ x \in \left[a+\frac{\delta_1}{2},\ b-\frac{\delta_1}{2}\right], \text{ cont. unif.} \right)$$

$$= \frac{\varepsilon}{3(b-a)} (b-a-2\delta_1) < \frac{\varepsilon\,(b-a)}{3\,(b-a)} = \frac{\varepsilon}{3}$$

On peut alors conclure que, pour λ assez grand :

$$\left| \int_a^b g(x) e^{i\lambda x} - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\pi/\lambda} g\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda x} \, dx \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6}$$

$$= \varepsilon.$$

6) On a déjà vu que l'amplitude des fréquences entières tend vers 0 lorsque la fréquence tend vers l'infini.

On peut alors voir le résultat comme l'amplitude des fréquences non entières tend vers 0 quand la fréquence tend vers l'infini.

3. Prouver le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Cas de base $n=1$:

$$\sin(x) + f_0(x) = 0$$

$$\Rightarrow -f_0(x) = \sin(x)$$

Lorsque $x = k\pi$, on a que $\sin(x) = 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, donc $f_0(x) = 0$ pour une infinité de x, donc $f_0(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ car une fonction rationnelle non-nulle a un nombre fini de zéros.

L'équation devient alors $\sin(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, ce qui est faux.

Donc il n'existe pas de fonction rationnelle f_0 t.q.

$$\sin(x) + f_0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Étape de récurrence

Supposons le résultat vrai pour $n-1$.

On veut alors montrer le résultat pour n. Supposons que f_i existe t.q.

$$\sin^n(x) + \sin^{n-1}(x) f_{n-1}(x) + \dots + f_0(x) = 0$$

Si $x = k\pi$, alors l'équation devient $f_0(k\pi) = 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, donc $f_0(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. L'équation est alors

$$\sin^n(x) + \sin^{n-1}(x) f_{n-1}(x) + \dots + \sin(x) f_1(x) = 0.$$

$$\Rightarrow \sin(x) \left[\sin^{n-1}(x) + \sin^{n-2}(x) f_{n-1}(x) + \dots + f_1(x)\right] = 0$$

Puisque $\sin x = 0$ ssi $x = k\pi$, la somme doit être nulle partout ailleurs. Puisque la somme est continue, elle doit nécessairement être nulle partout, or, par l'hypothèse d'induction, il n'y a pas de fonctions naturelles f_i telle que la somme est nulle. Contradiction.

Donc, le résultat est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

4. Soit $c \in [a,b]$

Prenons P une partition de $[a,c]$ et Q une partition de $[c,b]$, on a que

$$I(f,P) + I(f,Q) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) + \sum_{j=1}^{l} m_j (x_j - x_{j-1})$$

où $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f$ (sur $[a,c]$)

$m_j = \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f$ (sur $[c,b]$).

$$= \sum_{i=1}^{n+l} m_i (x_i - x_{i-1})$$

où $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f$ (sur $[a,b]$)

$$= I(f, P \cup Q)$$

$$\leq \underline{\int_a^b} f$$

En prenant l'infimum sur P, Q, on a que

$$\underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f \leq \underline{\int_a^b} f$$

De plus, soit R une partition de $[a,b]$. On peut alors trouver une partition P de $[a,c]$ et Q de $[c,b]$ t.q. $R \cup \{c\} = P \cup Q$

On a alors

$$\begin{aligned} I(f, R) &\leq I(f, R \cup \{c\}) \\ &= I(f,P) + I(f,Q) \qquad \text{(même idée avec les sommes)} \\ &\leq \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f \end{aligned}$$

En prenant l'infimum sur R, on a que

$$\underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$$

On a donc finalement que

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$$