TP0

1.a) Si f est continue en c, alors on sait par définition que

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q. $\forall x \in I$ si $|x - c| < \delta$, alors $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$

On veut m.q. $\lim\limits_{h \to 0^+} \sup\limits_{[c, c+h]} f(x) = f(c)$

On veut donc m.q., par définition de la limite, que

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q. $\forall h > 0$, si $|h| < \delta$, alors $\left| \sup\limits_{x \in [c, c+h]} f(x) - f(c) \right| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$

Soit $\delta_1 > 0$ t.q. $\forall x \in I$, si $|x - c| < \delta_1$, alors $|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (par déf de la cont. en c)

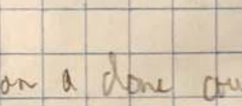
En prenant $\delta = \delta_1$, on a que

si $|h| < \delta$, alors $\forall x \in [c, c+h]$, on a que

$$
\begin{aligned}
|x - c| &\leq |(c+h) - c| \qquad (x \in [c, c+h]) \\
&= |h| \\
&< \delta = \delta_1
\end{aligned}
$$

Par la continuité de f en c, on a donc que, $\forall x \in [c, c+h] \subset I$,

$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$.



$\Rightarrow f(c) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(c) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in [c, c+h]$

Par définition du supremum, on a que

$$\sup_{x \in [c, c+h]} f(x) \leq f(c) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [c, c+h]} f(x) - f(c) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \sup_{x \in [c, c+h]} f(x) - f(c) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad \left(\sup_{x \in [c, c+h]} f(x) \geq f(c) \text{ car } c \in [c, c+h] \right)$$

Nous obtenons donc la conclusion désirée.

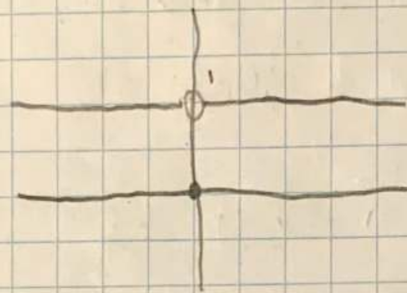
$\square$

On remarque que la preuve est identique pour $h < 0$, tant que $c + h \in I$ puisque $|h| = |-h|$. Il faut changer $[c, c+h]$ par $[c+h, c]$ et $\lim_{h \to 0^+}$ par $\lim_{h \to 0^-}$ et $\forall h < 0$.

De même pour l'infimum.

b) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$



On remarque alors que, $\forall h > 0$, $\sup\limits_{x \in [0,h]} f(x) = 1$, on a alors que

$$\lim_{h \to 0^+} \sup_{x \in [0,0+h]} f(x) = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1 \neq 0 = g(0)$$

Le problème ici est que la fonction g n'est pas continue, donc la preuve en a) ne s'applique pas.

2. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction uniformément continue, alors par définition

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q. $\forall y, z \in [a,b]$, on a

$|y - z| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| < \varepsilon.$

On veut m.q., $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q. $\forall y, z \in [a,b]$, si

$0 < z - y \leq \delta$, on a $\sup\limits_{x \in [y,z]} f(x) \leq \inf\limits_{x \in [y,z]} f(x) + \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$

Soit δ_1 t.q. $\forall y, z \in [a,b]$ avec $|y - z| < \delta_1$, alors $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$.

Soit $y, z \in [a,b]$ t.q. $|y - z| < \delta_1$

Soit $y_0 \in [y,z]$ t.q. $f(y_0) = \sup\limits_{x \in [y,z]} f(x)$ (Sup atteint car f unif. cont. sur $[a,b] \supset [y,z]$ Prop. des bornes atteintes)

Soit $z_0 \in [y,z]$ t.q. $f(z_0) = \inf\limits_{x \in [y,z]} f(x)$

Soit $\delta = \frac{\delta_1}{2}$, on a alors que

$$\begin{aligned} |y_0 - z_0| &\leq |y - z| \\ &= z - y && (0 < z - y) \\ &\leq \frac{\delta_1}{2} && (\text{hyp}) \\ &< \delta_1 \end{aligned}$$

On voit donc que, par continuité uniforme de f, que

↓

$$|f(y_0) - f(z_0)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \sup_{x\in[y,z]} f(x) - \inf_{x\in[y,z]} f(x) \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[y,z]} f(x) - \inf_{x\in[y,z]} f(x) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[y,z]} f(x) \leq \inf_{x\in[y,z]} f(x) + \varepsilon$$

Puisque ε, y, z sont arbitraires, on a la conclusion.

TP 0

3. a) Utilisons le théorème des développements limités ; puisque f est n-fois dérivable en x_0, nous avons

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)h^k}{k!} + \varepsilon(h)\, h^n$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$

On veut m.q.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)\, h^n}{n!} + o(h^n)$$

On veut donc montrer que

$$\varepsilon(h)\, h^n = o(h^n)$$

Par définition de $o(h^n)$, on a que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varepsilon(h)\, h^n}{h^n} = \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \quad \text{par définition de } \varepsilon(h)$$

$\square$

b) i) Soit $f(x) = \sin(x)$. Puisque $f \in C^\infty$, alors f est 2-fois dérivable en $x_0 = 0$. Nous avons alors

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + \frac{f''(x_0)\, h^2}{2} + o(x^2)$$

$$\Rightarrow f(x) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$= \sin(0) + \frac{d}{dx} \sin x \Big|_{x=0} x + \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} \sin x\right)\right)\Big|_{x=0} x^2 + o(x^2)$$

$$= 0 + \cos(0)x - \frac{\sin(0)}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$\sin(x) = x + o(x^2)$$

$\square$

ii) Soit $f(x) = \log(x)$. Puisque f est dérivable en $x_0 = 1$, nous avons que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + o(x)$$

$$\Rightarrow f(1+x) = f(1) + f'(1)\, x + o(x)$$

$$\Rightarrow \log(1+x) = \log(1) + \frac{d}{dx}(\log x)\Big|_{x=1} x + o(x)$$

$$= 0 + \frac{1}{x}\Big|_{x=1} \cdot x + o(x)$$

$$= x + o(x)$$

$\square$

iii) Reprenons le développement de $f(x) = \sin(x)$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + \frac{f''(x_0)\, h^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)\, h^3}{3!} + \frac{f^{(4)}\, h^4}{4!} + o(x^4)$$

$$= x + \frac{\frac{d}{dx}(-\sin x)\Big|_{x=0}}{3!} x^3 + \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(-\sin x)\right)\Big|_{x=0}}{4!} x^4 + o(x^4)$$

$$= x + \frac{-\cos(0)\, x^3}{3!} + \frac{\frac{d}{dx}[-\cos x]\Big|_{x=0}}{4!} x^4 + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin(0)\, x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

$\square$

4. Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe, alors $\exists\, C \in [0,\infty)$ (dû à l'image de f,g) t.q.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C$$

i) $\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta > 0$ t.q. $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - C \right| < \varepsilon$ dès que $x > \Delta$ (déf lim.)

On veut m.q. $\exists M \geq 0$ et $C > 0$ t.q. $\forall x \geq M$, on a $|f(x)| \leq C|g(x)|$

Soit $\varepsilon > 0$. On a alors, $\forall x > \Delta$

$$|f(x)| = \frac{|f(x)|}{|g(x)|}\,|g(x)| \quad (g(x) \neq 0)$$

$$= \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\,|g(x)|$$

$$\leq (C+\varepsilon)\,|g(x)| \qquad \left(\left|\frac{f(x)}{g(x)} - C\right| < \varepsilon \right)$$

$$= D\,|g(x)| \qquad D = C+\varepsilon > 0$$

i) $\frac{f(x)}{g(x)} < C+\varepsilon$ ou $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - C\right|$

$$= C - \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$$

En prenant $M = 2\Delta$ et $D = C+\varepsilon$ où $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C$;) $C \geq \frac{f(x)}{g(x)}$

On a avec $\forall x \geq M$, $|f(x)| \leq D\,|g(x)|$

Donc f est un $O(g(x))$.

5. On sait que $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = C$, pour $C \in [0, \infty)$, donc

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q. si $|x| < \delta$, alors $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - C \right| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$. On a alors, $\forall x$ t.q. $|x| < \delta$

$$|f(x)| = \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| |g(x)|$$

$$\leq |C + \varepsilon| \, |g(x)|$$

$$\doteq D \, |g(x)| \qquad D = C + \varepsilon > 0$$

En prenant $m = \delta > 0$, $D = C + \varepsilon > 0$ où $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = C$, on a que

si $|x| < m$, alors $|f(x)| \leq D \, |g(x)|$

Donc f est un $O(g(x))$.

$\square$

Série 1

1a) Soit P une subdivision de $[a,b]$ et Q une subdivision de $[b,c]$

On a alors que $P \cup Q$ est une subdivision de $[a,c]$.

On a donc que

$$S(f,P) + S(f,Q) = \sum_{i=1}^{n} M_j (x_i - x_{i-1}) + \sum_{j=1}^{m} N_j (x_j - x_{j-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_j (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=n+1}^{m+n} N_j (x_j - x_{j-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n+m} Q_j (x_i - x_{i-1})$$

$$= S(f, P \cup Q) \geq \overline{\int_a^c} f$$

où $M_j, N_j, Q_j = \sup\limits_{[x_{j-1}, x_j]} f$ sur $[a,b]$, $[b,c]$ et $[a,c]$ resp.

On a alors, en prenant $\inf\limits_P$, $\inf\limits_Q$:

$$\overline{\int_a^b} f + \overline{\int_b^c} f \geq \overline{\int_a^c} f$$

On a aussi que, par un argument analogue

$$I(f,P) + I(f,Q) = I(f, P \cup Q) \leq \underline{\int_a^c} f$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_b^c} f \leq \underline{\int_a^c} f$$

Puisque f est int sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$, on a alors que

$$\int_a^b f + \int_b^c f \leq \underline{\int_a^c} f \leq \overline{\int_a^c} f \leq \int_a^b f + \int_b^c f$$

Donc, f est int. sur $[a,c]$ par sandwich et :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$$

b) Soit P une subdivision de $[a,b]$ et $c \in \mathbb{R}$. On a donc

$$c\, S(f,P) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) \qquad \text{pour } M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \ \forall i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c M_i (x_i - x_{i-1}) \qquad \text{Sommation linéaire}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} N_i (x_i - x_{i-1}) \qquad N_i = cM_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} cf$$

$$= S(cf, P) \geq \overline{\int_a^b} cf$$

On a alors, en prenant $\inf_P$

$$\Rightarrow c \overline{\int_a^b} f \geq \overline{\int_a^b} cf$$

Analoguement, on a avec $c \underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} cf$

On a alors donc, puisque f est intégrable sur $[a,b]$

$$c \overline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} cf \leq \overline{\int_a^b} cf \leq c \int_a^b f$$

Alors cf est intégrable sur $[a,b]$ par sandwich et

$$c\int_a^b f = \int_a^b cf$$

c) Soit P une partition de $[a,b]$, on a alors

$$\overline{\int_a^b} f \leq S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1}) \qquad M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} N_i\,(x_i - x_{i-1}) \qquad N_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} g \;,\quad f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow M_i \leq N_i \ \forall i$$

$$= S(g,P)$$

En prenant l'$\inf_P$, on a que

$$\overline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} g$$

Puisque f et g sont intégrables, on a que

$$\overline{\int_a^b} f = \int_a^b f \leq \int_a^b g = \overline{\int_a^b} f .$$

ce que nous voulions.