Calcul intégral

Examen final

Automne 2021

Enseignant : Jonathan Godin
Sigle du cours : MAT-1923
Date : 14 décembre 2021

Justifiez vos réponses. Laissez vos réponses sous forme de fractions simplifiées et de racines carrées, le cas échéant.

Aide-mémoire

Substitution :

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u,$$

$$\text{avec } u = g(x)$$
$$\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Intégration par partie :

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

Valeurs spéciales de sin et cos :

$$\begin{aligned}
&\sin 0 = 0, && \cos 0 = 1,\\
&\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{1}{2}, && \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2},\\
&\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, && \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2},\\
&\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, && \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{2},\\
&\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1 && \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

Propriétés des fonctions élémentaires :

$$\begin{aligned}
e^{x+y} &= e^x e^y\\
\ln(xy) &= \ln x + \ln y && (x, y > 0)\\
\ln(x^y) &= y \ln x && (x > 0)\\
\ln(e^x) &= x\\
e^{\ln x} &= x && (x > 0)
\end{aligned}$$

Règle de l'Hôpital : si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

est une indétermination de forme $0/0$ ou ∞/∞, alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si cette dernière limite existe.

Identités trigonométriques :

$$\begin{aligned}
&\sin^2 x + \cos^2 x = 1\\
&\tan^2 x + 1 = \sec^2 x\\
&\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b\\
&\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b\\
&\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}\\
&\sin(2x) = 2 \sin x \cos x\\
&\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x\\
&\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}\\
&\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}
\end{aligned}$$

Élément de longueur : $\mathrm{d}\ell = \sqrt{1 + (x')^2}\,\mathrm{d}y$ ou $\mathrm{d}\ell = \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x$

Élément d'aire : $\mathrm{d}A = 2\pi R\,\mathrm{d}\ell$

Éléments de volume :

Disque $\mathrm{d}V = \pi(R^2 - r^2)(\mathrm{d}x \text{ ou } \mathrm{d}y)$ Cylindre $\mathrm{d}V = 2\pi RH(\mathrm{d}x \text{ ou } \mathrm{d}y)$

Formules de base :

$$\int x^r \,\mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad (r \neq -1)$$

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \sec x \tan x \,\mathrm{d}x = \sec x + C$$

$$\int \tan x \,\mathrm{d}x = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \sec x \,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotan} x + C$$

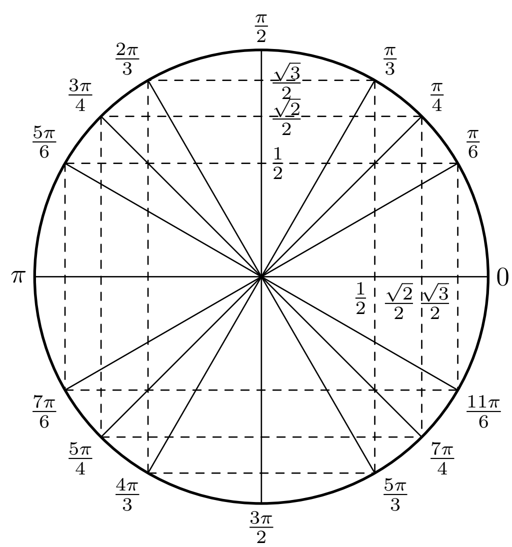
$$\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotan} x \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cosec} x + C$$

$$\int \operatorname{cotan} x \,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \operatorname{cosec} x \,\mathrm{d}x = -\ln|\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotan} x| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$$

Cercle trigonométrique



Sommes partielles de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

- $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$
- la série converge si $\lim_{k\to\infty} s_k$ converge

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.