MAT 6111 - Mesure et intégration

Final

Décembre 2011

Chaque question vaut 10 points.

1. Soient $f \in \mathbb{L}^2([0, +\infty[)$ et
$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$
Montrer que
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{\sqrt{x}} = 0.$$
Suggestion. Fixer $a > 0$ et appliquer l'inégalité de Hölder sur l'intervalle $[a, x]$.

2. Calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|y|}}{1 + (x - y)^2}\, dy.$$
(Justifier son calcul).

3. Si $(X, \mathfrak{T}, \mu)$ est un espace mesuré et $f, g \in \mathbb{L}^0(X, \mathfrak{T}, \mu)$ sont deux fonctions mesurables, on rappelle que
$$A_\delta(f, g) = \{x \mid |f(x) - g(x)| > \delta\}.$$
Soient $f, f_k \in \mathbb{L}^0(X, \mathfrak{T}, \mu)$ des fonctions telles que, pour tout $\delta > 0$,
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_\delta(f_k, f)) < +\infty.$$
Montrer qu'alors les fonctions f_k convergent μ-presque partout vers f.

4. Soit μ_F la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à la fonction
$$F(x) = \arctan x + \lfloor x \rfloor$$
(arctangente et partie entière).

- Calculer $\mu_F(]a, b])$, $\mu_F(]-\infty, b])$ et $\mu_F(]a, +\infty[)$.
- Déterminer la tribu $\mathfrak{T}_{\mu_F}$ des ensembles mesurables E puis $\mu_F(E)$.
- Déterminer l'espace $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_{\mu_F}, \mu_F)$ des fonctions intégrables f puis $\int_E f(x)\ dF(x)$.

André Giroux