MAT 6111 - MESURE ET INTÉGRATION

Examen final

Le 9 décembre 2010, de 9h00 à 11h00.

Chaque question vaut dix points.

1. Soient $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ deux tribus sur X. Soient
$$\mathfrak{S} = \{E_1 \cup E_2 \mid E_i \in \mathfrak{T}_i\}$$
et
$$\mathfrak{D} = \{E_1 \cap E_2 \mid E_i \in \mathfrak{T}_i\}.$$
Montrer que ces familles engendrent la même tribu :
$$\mathfrak{T}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{D}).$$

2. Soient μ une mesure positive sur X et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable strictement positive en tout point. Montrer que si $\mu(X) = +\infty$, f et $1/f$ ne peuvent pas être toutes les deux intégrables.

3. Soit la fonction
$$F(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } \ x \leq 0 \\ x & \text{si } \ x > 0. \end{cases}$$
Calculer
$$\mu_F([a, b])$$
et
$$\int_{-1}^{1} x \; dF(x).$$

4. Soient $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables ($f_k(a) = 0$) telles que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} ||f_k'||_\infty < +\infty.$$

Montrer que

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k'(x) \ , \ a < x < b.$$

André Giroux