# Surfaces Platoniques

Maxime Fortier Bourque

Université de Montréal

# Coller des polygones réguliers de façon régulière

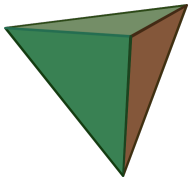
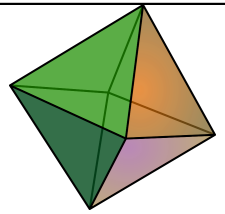
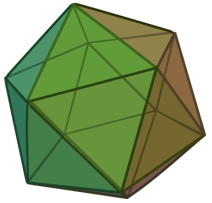
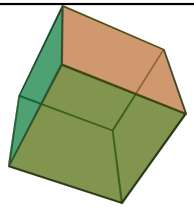
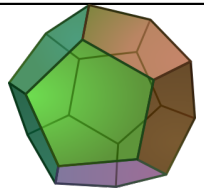
Prenons des polygones réguliers à $n$ sommets, tous congruents les uns aux autres, et collons les ensemble le long de leurs côtés de sorte que chaque arête appartienne à $2$ polygones et chaque sommet appartienne à $k$ arêtes (ou polygones).

# Coller des polygones réguliers de façon régulière

Prenons des polygones réguliers à $n$ sommets, tous congruents les uns aux autres, et collons les ensemble le long de leurs côtés de sorte que chaque arête appartienne à $2$ polygones et chaque sommet appartienne à $k$ arêtes (ou polygones).

# Coller des polygones réguliers de façon régulière

Prenons des polygones réguliers à $n$ sommets, tous congruents les uns aux autres, et collons les ensemble le long de leurs côtés de sorte que chaque arête appartienne à $2$ polygones et chaque sommet appartienne à $k$ arêtes (ou polygones).

| $n$ \ $k$ | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| 3 |  |  |  |
| 4 |  | | |
| 5 |  | | |

# Régularité implique symétrie

**Définition (1)**

*Un* **solide Platonique** *est un polyhèdre convexe dont toutes les faces sont congruentes à un polygone régulier donné tel que chaque sommet appartient au même nombre $k$ d'arêtes.*

# Régularité implique symétrie

**Définition (1)**

*Un* **solide Platonique** *est un polyhèdre convexe dont toutes les faces sont congruentes à un polygone régulier donné tel que chaque sommet appartient au même nombre $k$ d'arêtes.*

**Définition (2)**

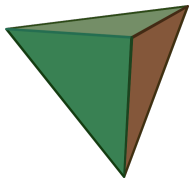
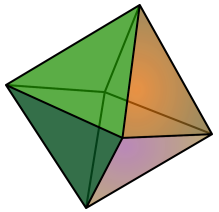
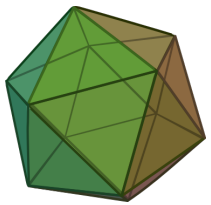
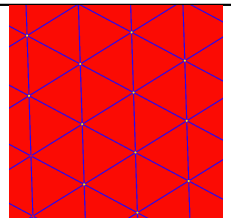
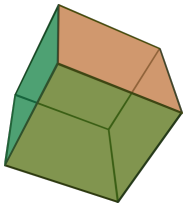
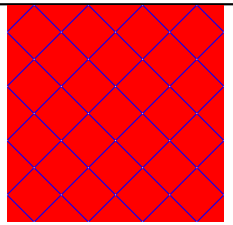
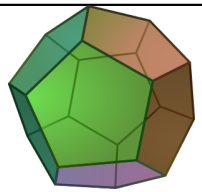
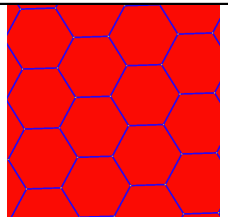
*Un* **solide Platonique** *est un polyhèdre convexe tel que toute face peut être envoyée sur toute autre et de n'importe quelle façon par une symétrie.*

# Pourquoi cinq solides Platoniques ?

Les angles intérieurs d'un $n$-gone régulier sont égaux à $\frac{(n-2)\pi}{n}$.

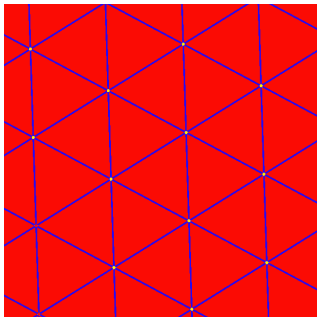
Pour obtenir un polyhèdre convexe, l'angle autour de chaque sommet doit être strictement plus petit que $2\pi$, donc on doit avoir $\frac{k(n-2)}{n} < 2$.

# Pourquoi cinq solides Platoniques ?

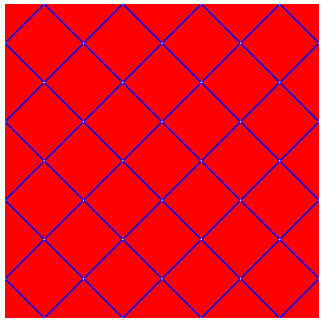
| $n$ \ $k$ | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 3 |  |  |  |  |
| 4 |  |  | | |
| 5 |  | | | |
| 6 |  | | | |

# Pavages du plan

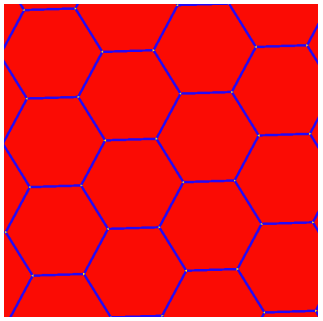
La règle était de coller des $n$-gones réguliers congruents ensemble de sorte qu'il y en ait $k$ à chaque sommet.



$(3,6)$



$(4,4)$

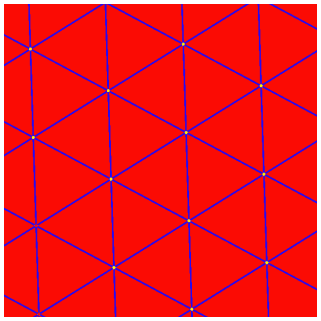


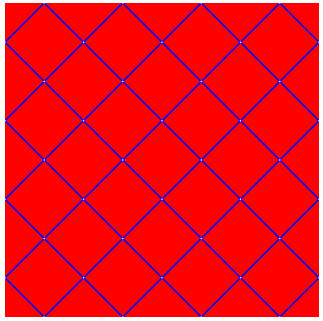
$(6,3)$

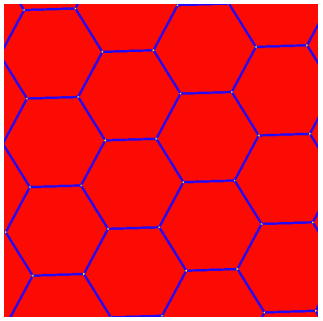
$(n,k)$

# Pavages du plan

La règle était de coller des $n$-gones réguliers congruents ensemble de sorte qu'il y en ait $k$ à chaque sommet.





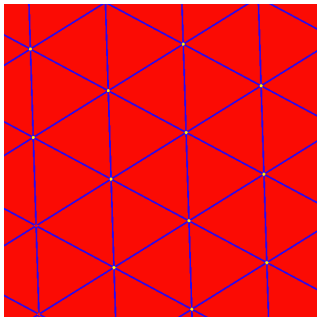


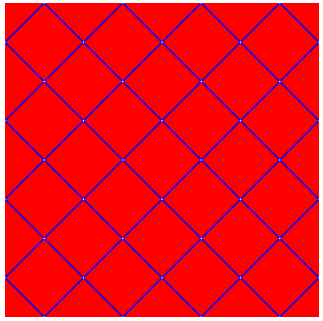
$(n, k)$ $(3, 6)$ $(4, 4)$ $(6, 3)$

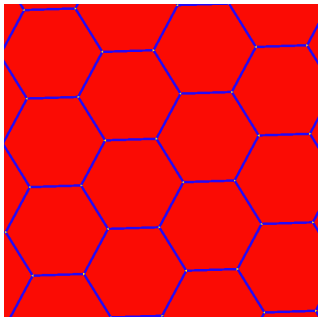
Est-ce qu'on peut le faire avec un nombre fini de polygones ?

# Pavages du plan

La règle était de coller des $n$-gones réguliers congruents ensemble de sorte qu'il y en ait $k$ à chaque sommet.





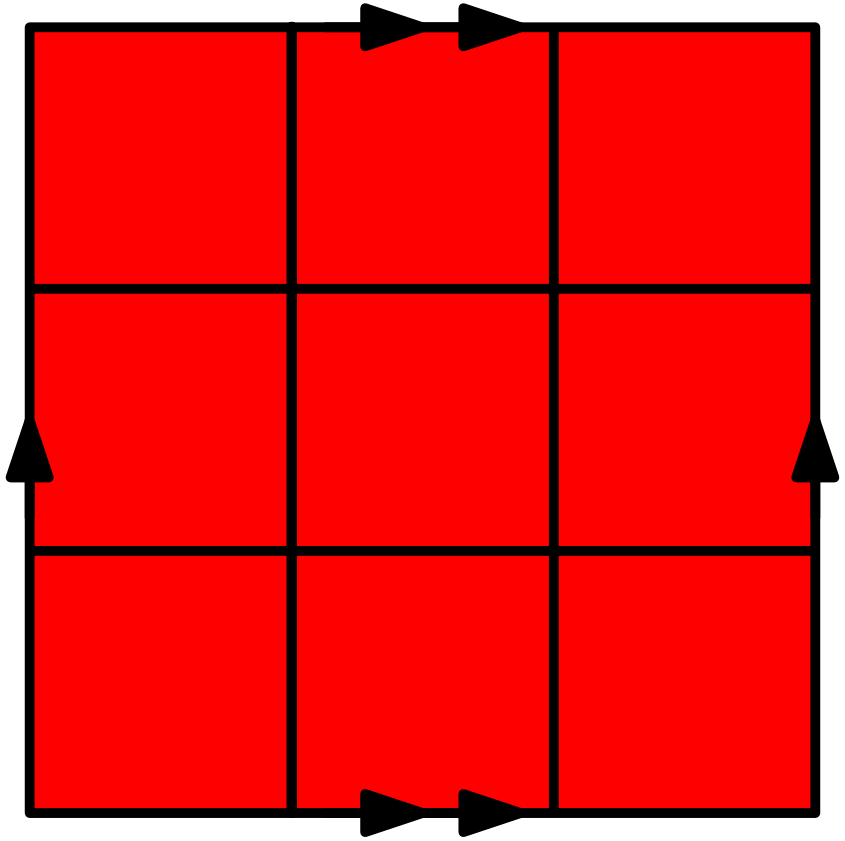


$(n, k)$ $(3, 6)$ $(4, 4)$ $(6, 3)$

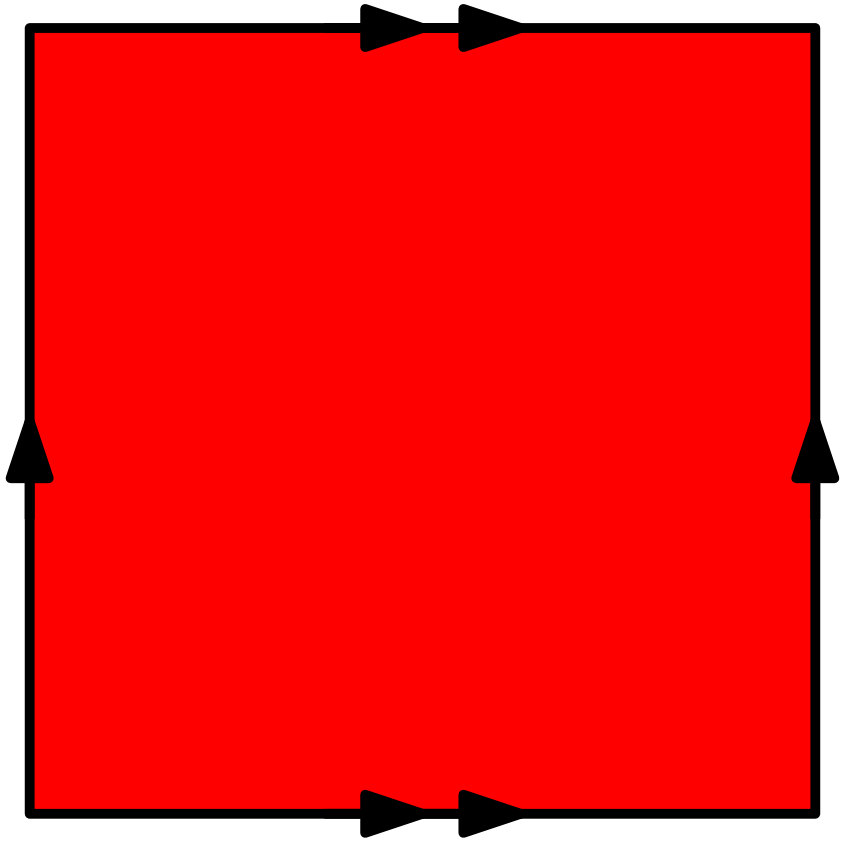
Est-ce qu'on peut le faire avec un nombre fini de polygones ?

Oui, avec un peu d'imagination.

# Le tore carré

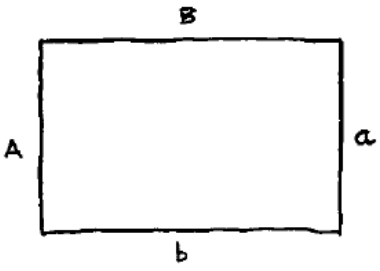


# Le tore carré



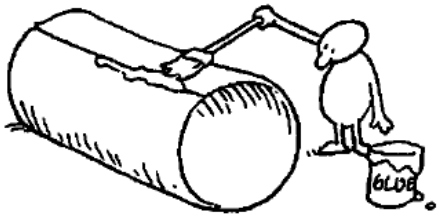
http://www.geometrygames.org/TorusGames/index.html.fr

# Tores rectangulaires

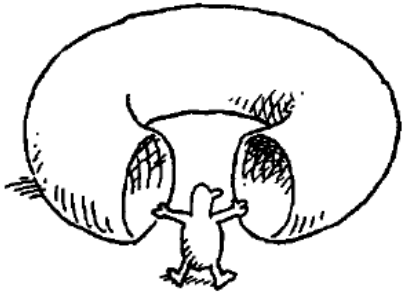



BEGIN WITH A RECTANGLE WITH SIDE A TO BE GLUED TO SIDE a, AND B TO b.

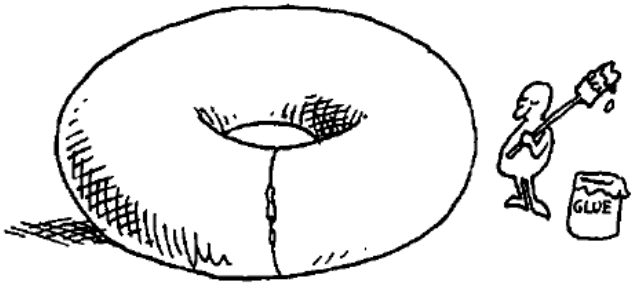
ROLL THE FIGURE TO BRING A TO a.




GLUE A TO a, FORMING A CYLINDER.

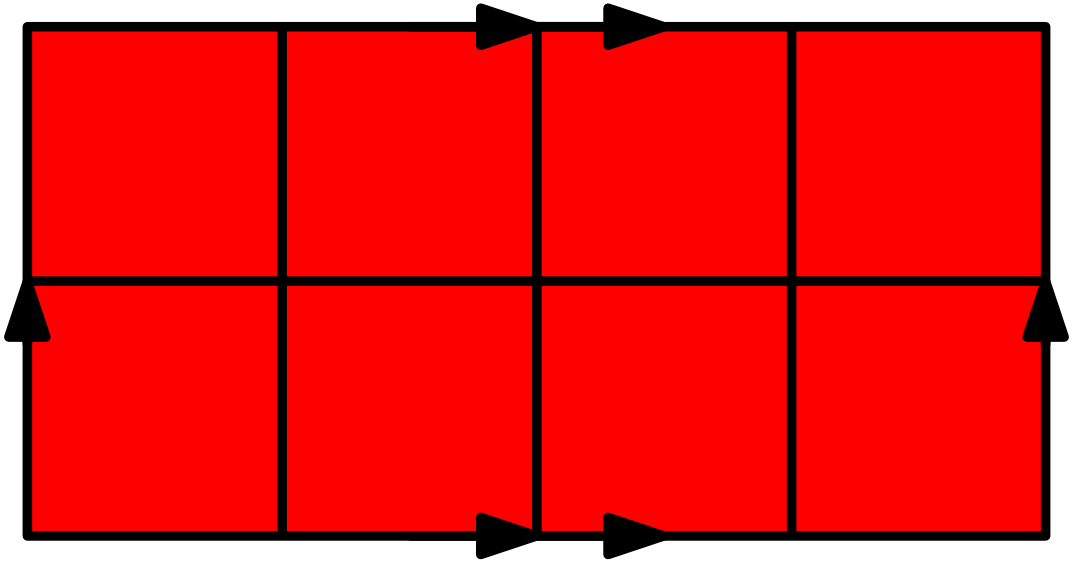


BEND CYLINDER AROUND TO BRING B IN CONTACT WITH b.

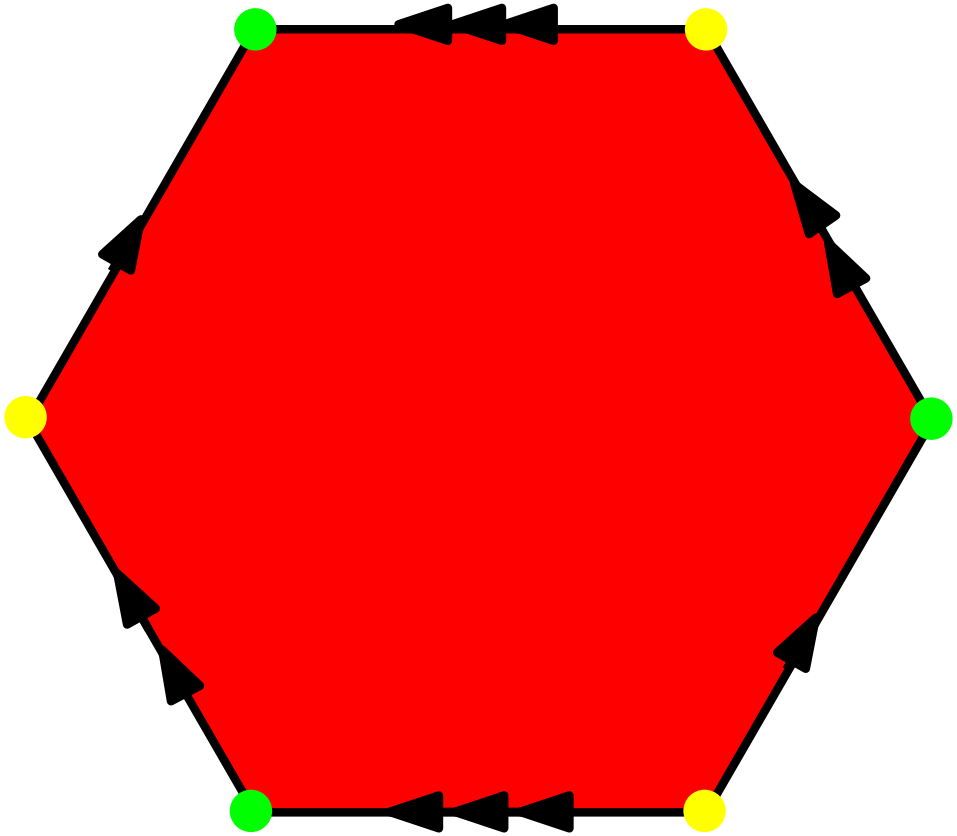



GLUE B TO b, FORMING A DOUGHNUT-SHAPED SURFACE OR TORUS.

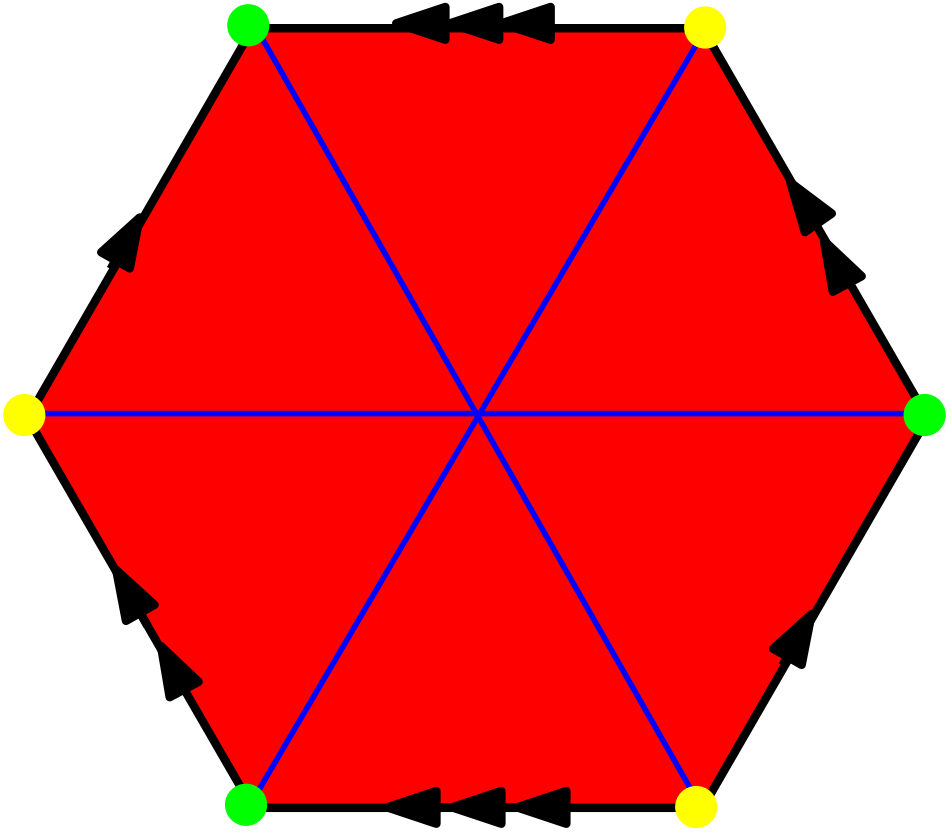
# Un tore localement mais pas globalement isotrope



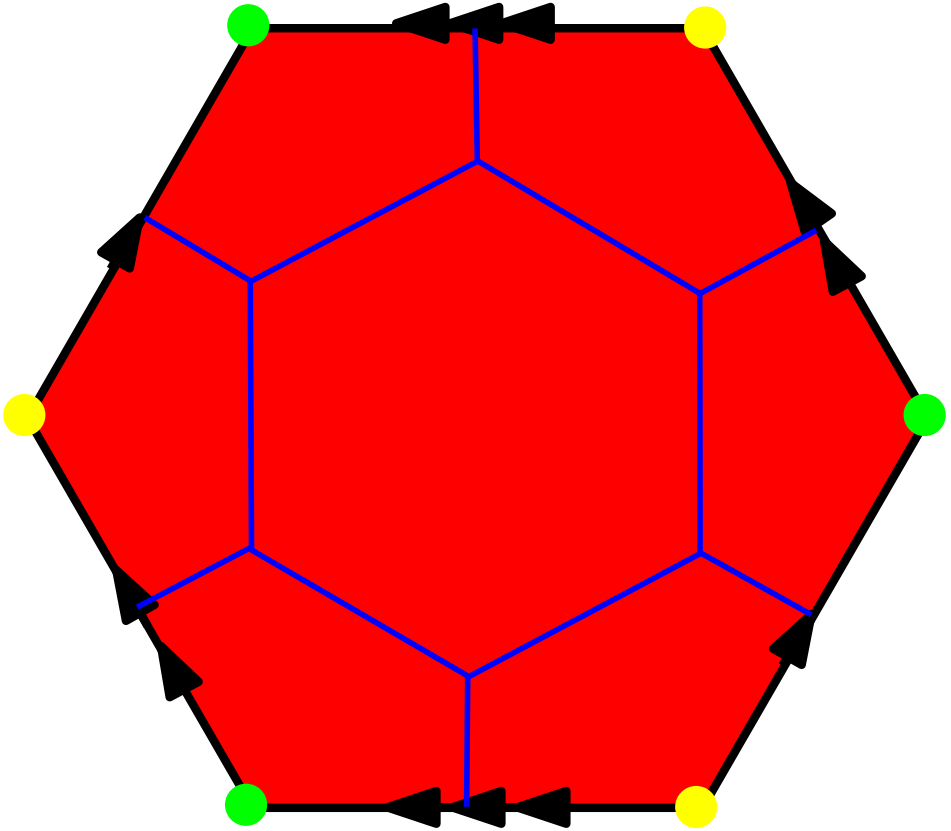
# Le tore hexagonal



# Le tore hexagonal

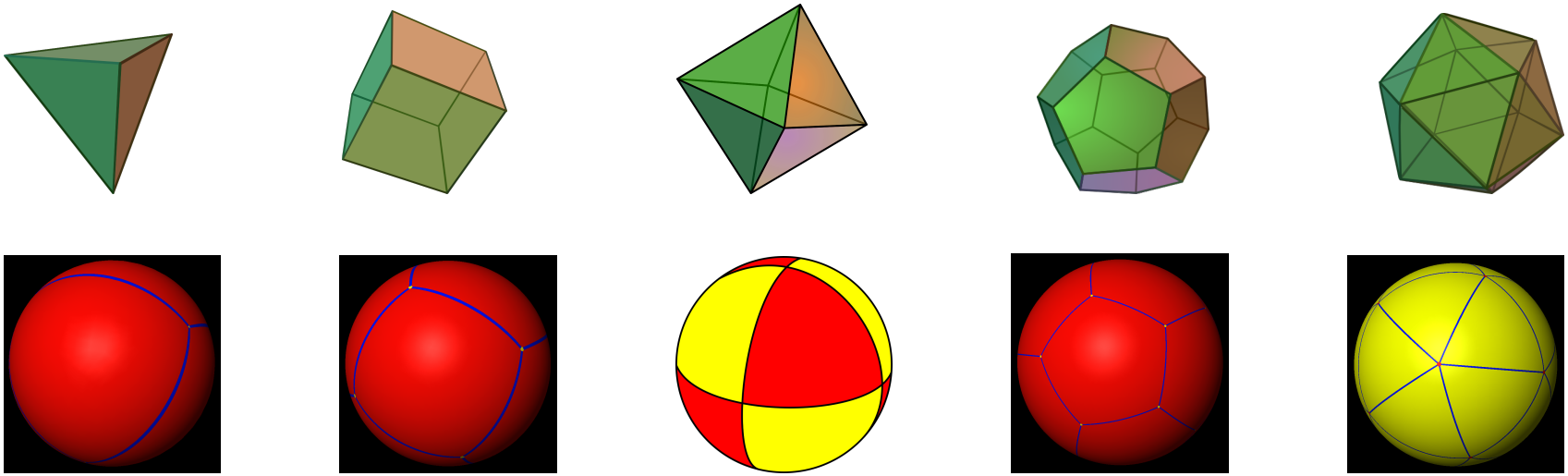


# Le tore hexagonal



# Pavages sphériques

Si on inscrit les solides Platoniques dans une sphère et qu'on projette leurs faces de façon radiale, on obtient des pavages la sphère par des polygones sphériques :



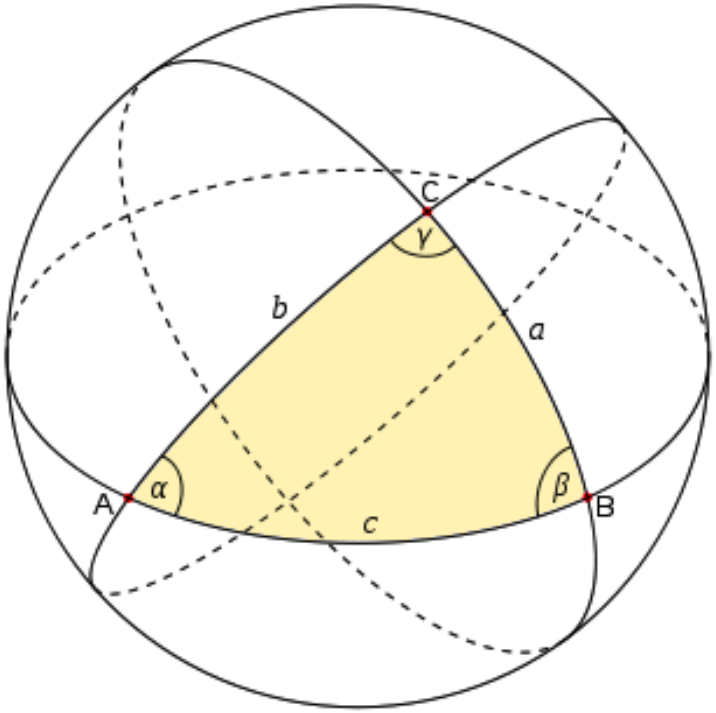
Sur la sphère, le chemin le plus court entre deux points est le long d'un grand cercle.

# L'aire d'un triangle

**Théorème (de Girard)**

*L'aire d'un triangle sphérique est égale à son excès angulaire*

$$\textit{somme des angles intérieurs} - \pi.$$



# L'aire d'un triangle

**Théorème (de Girard)**

*L'aire d'un triangle sphérique est égale à son excès angulaire*

$$\textit{somme des angles intérieurs} - \pi.$$

**Démonstration.**

Un biangle d'angle intérieur $\theta$ a une aire de $4\pi \cdot \theta/(2\pi) = 2\theta$.

# L'aire d'un triangle

**Théorème (de Girard)**

*L'aire d'un triangle sphérique est égale à son excès angulaire*

$$\textit{somme des angles intérieurs} - \pi.$$

**Démonstration.**

Un biangle d'angle intérieur $\theta$ a une aire de $4\pi \cdot \theta/(2\pi) = 2\theta$.
Soit $T$ un triangle d'angles intérieurs $\alpha, \beta, \gamma$.
Si on prolonge les côtés de $T$, on obtient $3$ biangles dont l'intersection est égale à $T$ et $3$ dont l'intersection est égale à son antipode $-T$.

# L'aire d'un triangle

**Théorème (de Girard)**

*L'aire d'un triangle sphérique est égale à son excès angulaire*

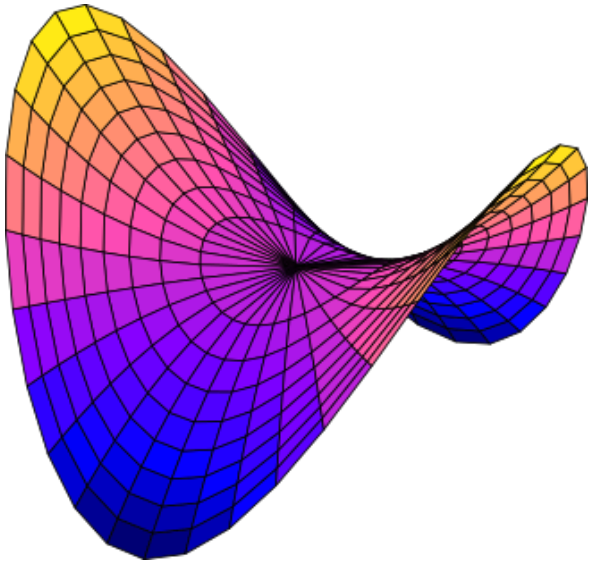
$$\text{somme des angles intérieurs} - \pi.$$

**Démonstration.**

Un biangle d'angle intérieur $\theta$ a une aire de $4\pi \cdot \theta/(2\pi) = 2\theta$.
Soit $T$ un triangle d'angles intérieurs $\alpha, \beta, \gamma$.
Si on prolonge les côtés de $T$, on obtient $3$ biangles dont l'intersection est égale à $T$ et $3$ dont l'intersection est égale à son antipode $-T$.
Ces biangles recouvrent la sphère une seule fois sauf pour $T$ et $-T$ qui sont recouverts $3$ fois.
On a donc $2(2\alpha + 2\beta + 2\gamma) = 4\pi + 2\,\mathrm{aire}(T) + 2\,\mathrm{aire}(-T)$. $\square$

# Le plan hyperbolique

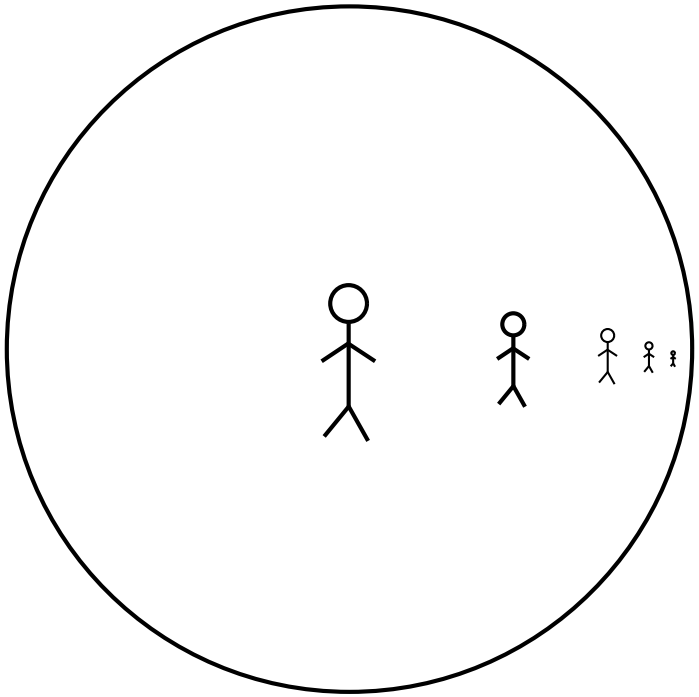
Tout comme les solides Platoniques sont des approximations de la sphère, les surfaces de type $(n, k)$ telles que l'angle $\frac{k(n-2)\pi}{n}$ en chaque sommet est strictement plus grand que $2\pi$ sont des approximations du **plan hyperbolique**.



Si on essaie de prolonger la selle de cheval, elle finit par s'intersecter elle même.

# Le modèle de Poincaré

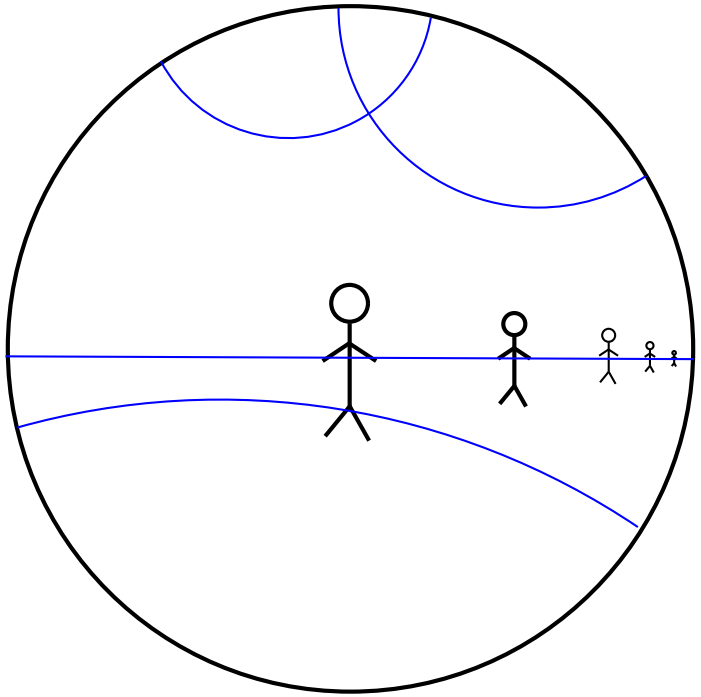
On utilise donc des modèles qui ne représentent pas bien les distances, pas préservent les angles.



taille = taille à l'origine $\times(1-r^2)$

# Le modèle de Poincaré

Le chemin le plus court entre deux points passe par une droite ou un cercle perpendiculaire au cercle unité (qui se trouve à une distance infinie).

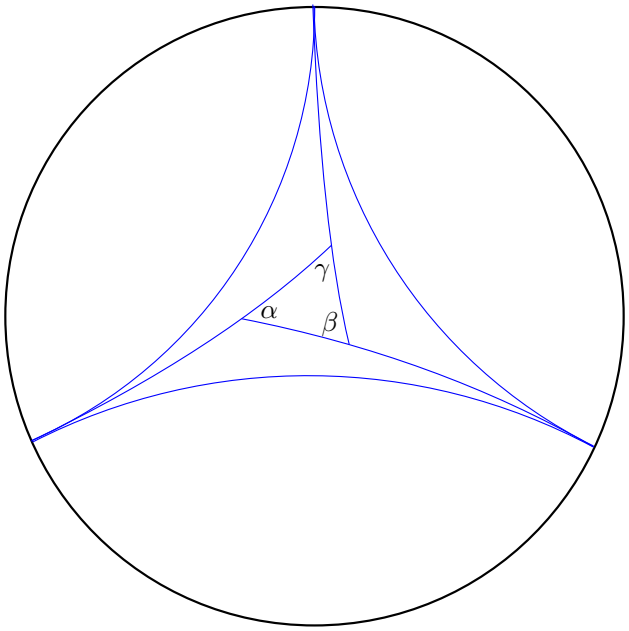


# L'aire d'un triangle hyperbolique

**Théorème (Gauss)**

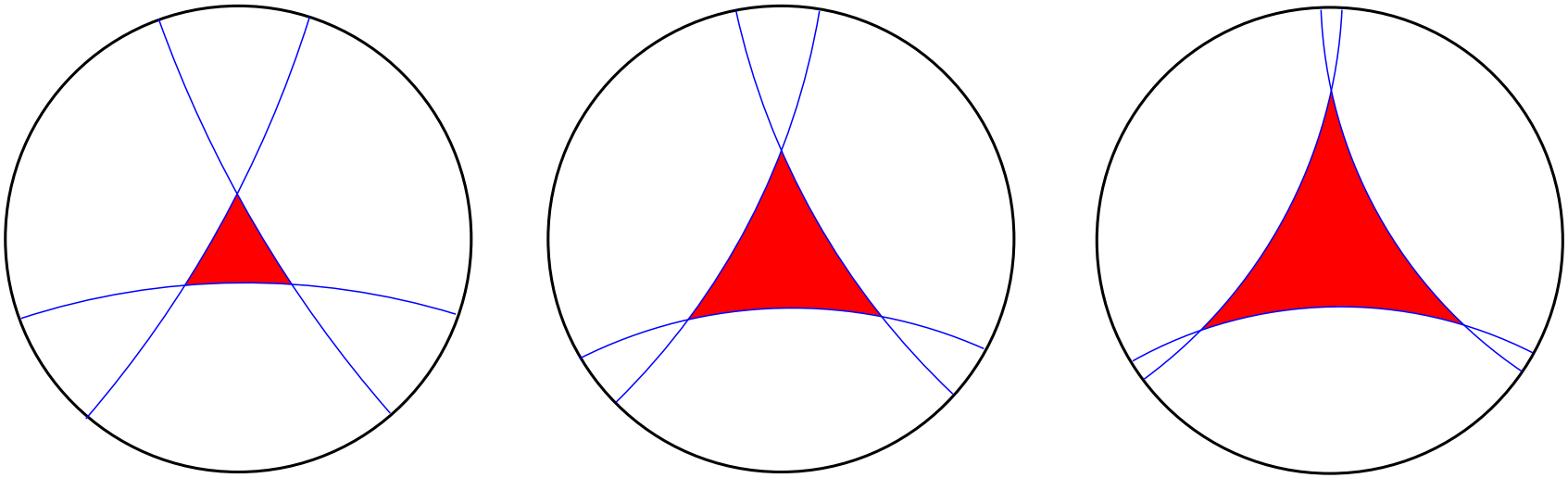
*L'aire d'un triangle hyperbolique est égale à son défaut angulaire*

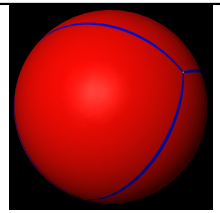
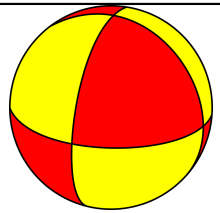
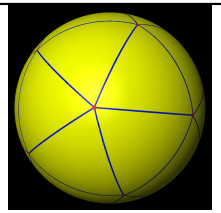
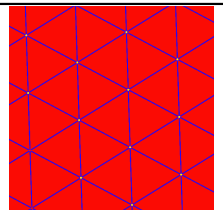
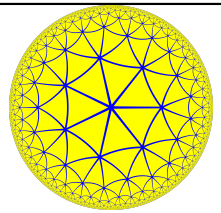
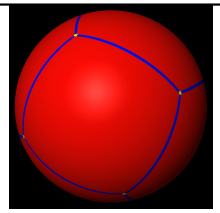
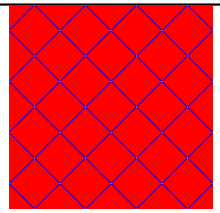
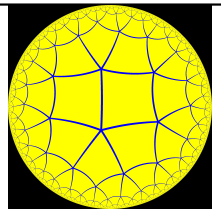
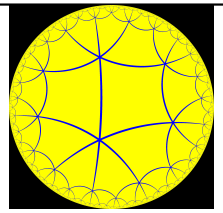
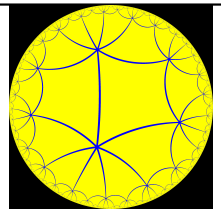
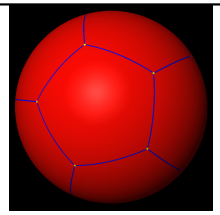
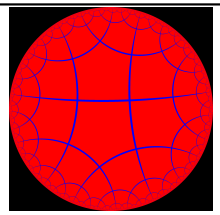
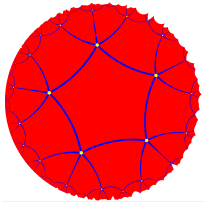
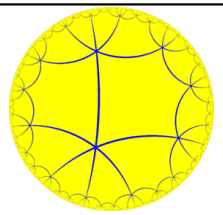
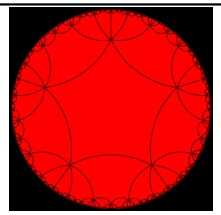
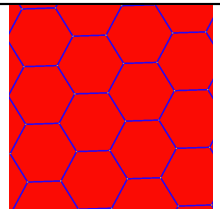
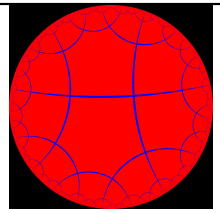
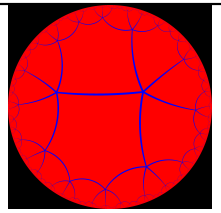
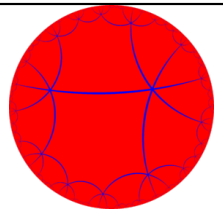
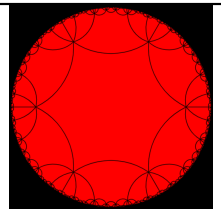
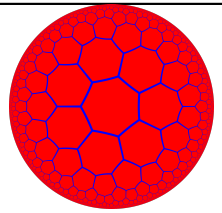
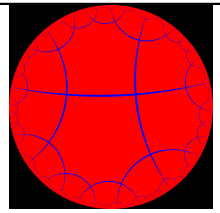
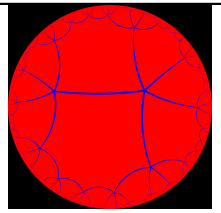
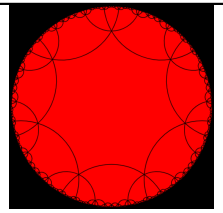
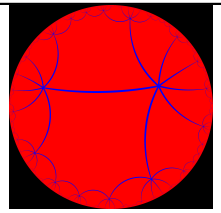
$$\pi - \textit{somme des angles intérieurs.}$$



# Les angles intérieurs d'un polygone

Pour tout $n \geq 3$ et tout $\theta < \frac{(n-2)\pi}{n}$, il existe un $n$-gone hyperbolique régulier dont les angles intérieurs sont égaux à $\theta$.



| $n$ \ $k$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |  |

# Surfaces Platoniques

Peut-on le faire avec un nombre fini de polygones ?

**Définition**

*Une* **surface Platonique** *est une surface fermée sphérique, Euclidienne, ou hyperbolique munie d'un pavage par polygones réguliers telle que chaque polygone peut être envoyé sur tout autre et de n'importe quelle façon par une symétrie de la surface.*

# Surfaces Platoniques

Peut-on le faire avec un nombre fini de polygones ?

**Définition**

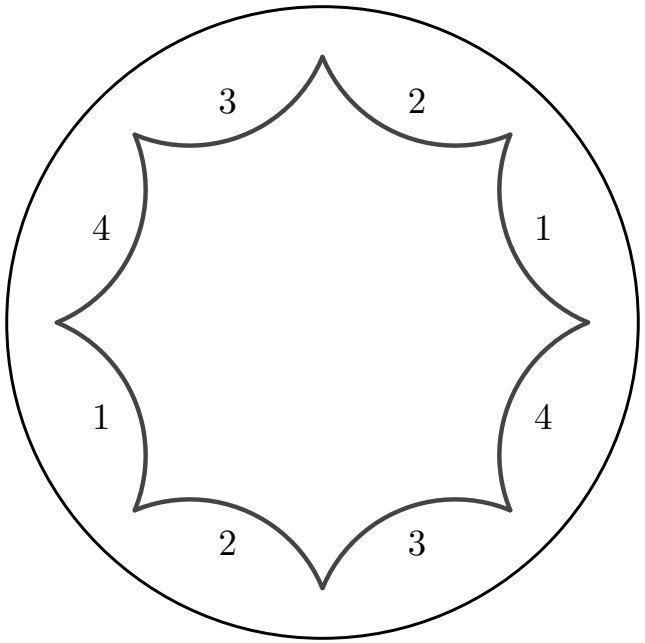
*Une* **surface Platonique** *est une surface fermée sphérique, Euclidienne, ou hyperbolique munie d'un pavage par polygones réguliers telle que chaque polygone peut être envoyé sur tout autre et de n'importe quelle façon par une symétrie de la surface.*

**Théorème**

*Pour toute paire* $(n, k)$ *correspondant à un pavage hyperbolique, il existe une infinité de surfaces Platoniques de ce type.*

# La surface de Bolza

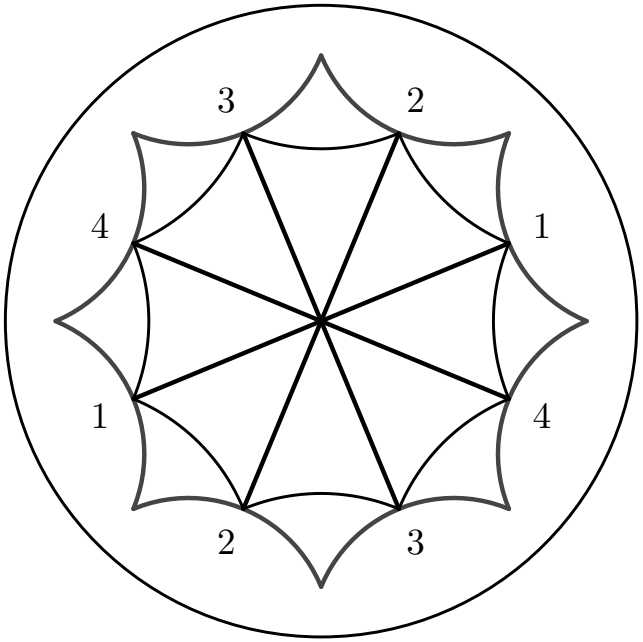
Le plus “petite” surface Platonique hyperbolique est la surface de Bolza, un tore à deux trous/poignées.

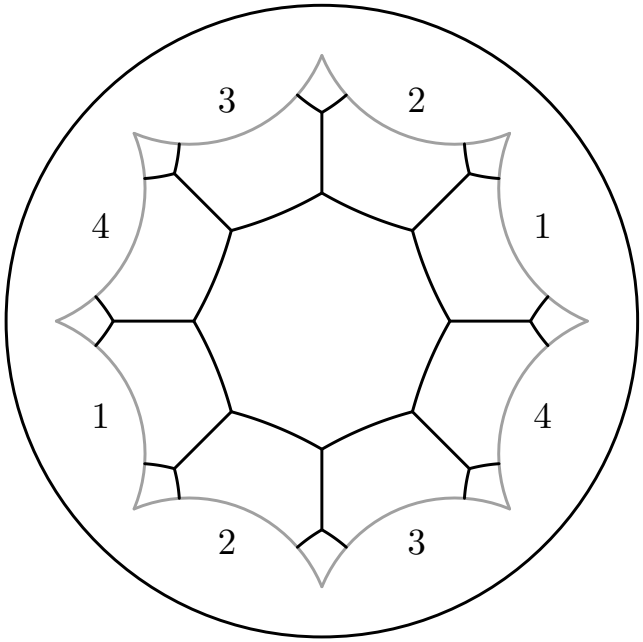



On prend un octogone régulier d’angles intérieurs $\pi/4$ et on colle les côtés opposés ensemble.

# La surface de Bolza

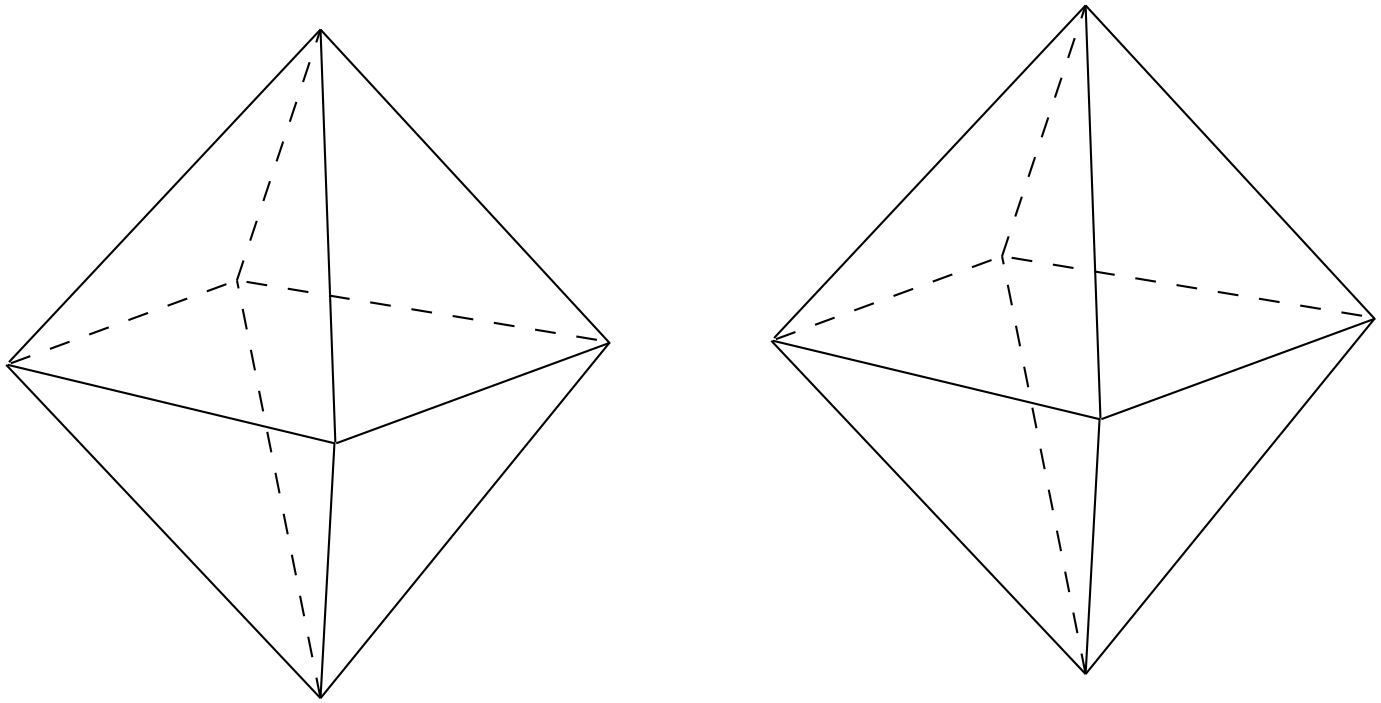
Ça donne une surface Platonique de type $(3, 8)$ ou $(8, 3)$.



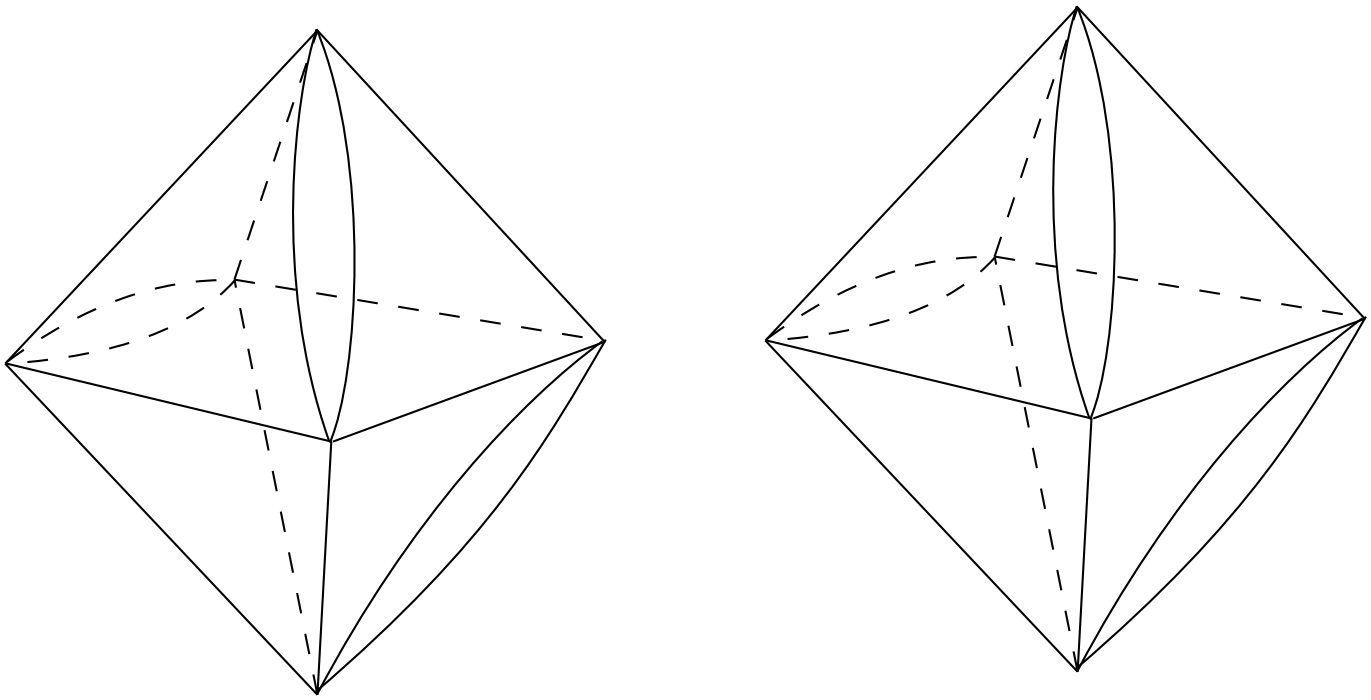
# La surface de Bolza

Il existe une relation entre la surface de Bolza et l'octahèdre.



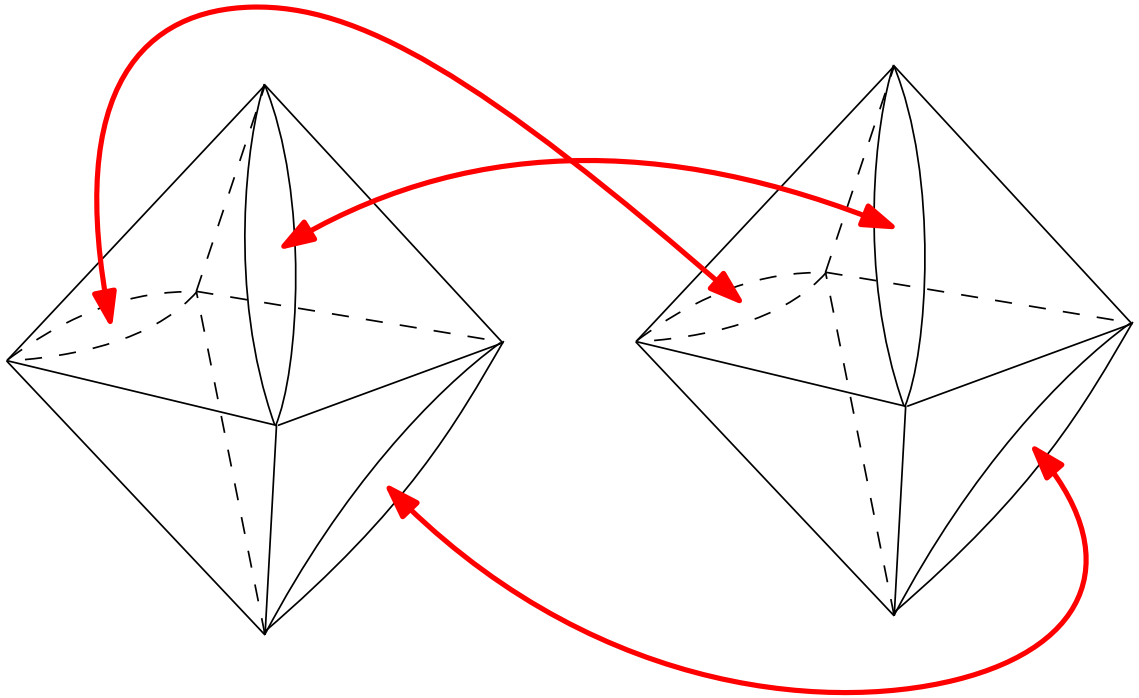
# La surface de Bolza

Il existe une relation entre la surface de Bolza et l'octahèdre.



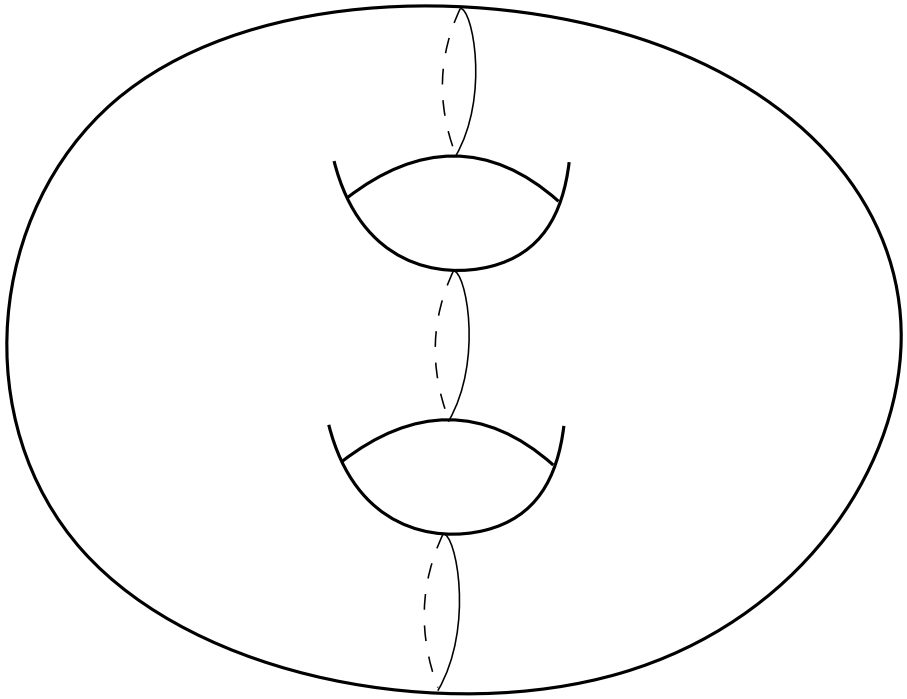
# La surface de Bolza

Il existe une relation entre la surface de Bolza et l'octahèdre.



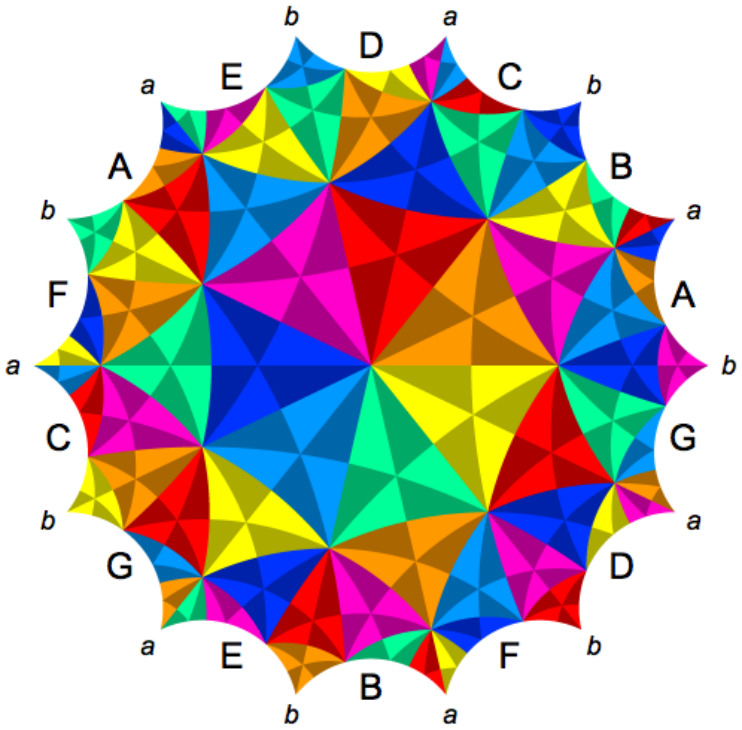
# La surface de Bolza

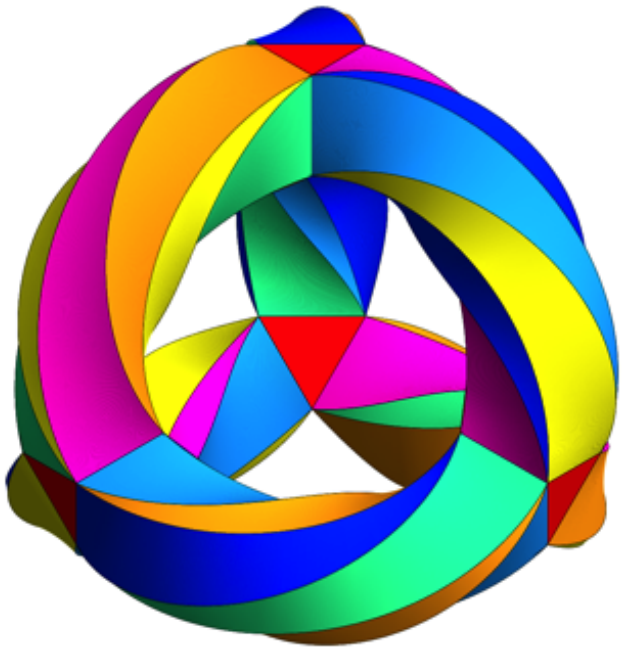
Il existe une relation entre la surface de Bolza et l'octahèdre.



# La surface de Klein

La surface suivante est de type $(3, 7)$ et de genre égal à 3. Elle est pavée de 56 triangles équilatéraux ou $24$ heptagones réguliers. Elle admet donc $56 \times 6 = 24 \times 14 = 336$ symétries.



https://www.geometrygames.org/HyperbolicGames/

# La grande question sur la vie, l'univers et le reste

**Réponse :** 42.

# La grande question sur la vie, l'univers et le reste

**Réponse :** 42.

**Question :** Quel est le maximum possible de

$$\frac{\#\mathrm{Isom}(S)}{4(\mathrm{genre}(S)-1)}$$

parmi les surfaces hyperboliques ?

# La grande question sur la vie, l'univers et le reste

**Réponse :** 42.

**Question :** Quel est le maximum possible de

$$\frac{\#\mathrm{Isom}(S)}{4(\mathrm{genre}(S)-1)}$$

parmi les surfaces hyperboliques ?

Les surfaces qui réalisent le maximum sont appelées *surfaces de Hurwitz*, qui n'existent qu'en genre $3$, $7$, $14$, $17$, $118$, $129$, $146\ldots$

# Le théorème de Hurwitz

L'idée est que $\mathrm{Isom}(S)$ est toujours fini, alors le quotient $S/\mathrm{Isom}(S)$ est localement une surface hyperbolique, excepté aux centres de rotations et le long des axes de réflexion.

Par exemple, si $S$ est une surface Platonique de type $(n, k)$, alors $S/\mathrm{Isom}(S)$ est un triangle d'angles $\pi/2$, $\pi/n$ et $\pi/k$.

On a

$$\mathrm{aire}(S/\mathrm{Isom}(S)) = \frac{\mathrm{aire}(S)}{\#\mathrm{Isom}(S)} = \frac{4\pi(\mathrm{genre}(S) - 1)}{\#\mathrm{Isom}(S)}$$

alors le problème revient à minimiser l'aire de $S/\mathrm{Isom}(S)$.

# La formule de Gauss–Bonnet

Si $M$ est une surface, alors

$$\int_M K\,dA + \int_{\partial M} k\,ds = 2\pi\chi(M)$$

où $K$ est la courbure Gaussienne, $k$ la courbure géodésique et $\chi$ la caractéristique d'Euler.

Par exemple, si $M$ est un triangle Euclidien, alors la formule dit simplement que la somme des angles intérieurs est $\pi$. Si $M$ est un triangle sphérique ou hyperbolique, la formule permet de calculer son aire en fonction des angles intérieurs.

# La formule de Gauss–Bonnet

Si $M$ est une surface, alors

$$\int_M K\,dA + \int_{\partial M} k\,ds = 2\pi\chi(M)$$

où $K$ est la courbure Gaussienne, $k$ la courbure géodésique et $\chi$ la caractéristique d'Euler.

En appliquant la formule à $M = S/\mathrm{Isom}(S)$, on obtient une formule pour son aire en fonction de sa topologie et des ordres des points coniques.

Hurwitz montre ensuite que le minimum est réalisé quand $S/\mathrm{Isom}(S)$ est un triangle d'angles $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/7$, donc quand $S$ est une surface Platonique de type $(3, 7)$.

# 42

On a

$$\mathrm{aire}(S/\mathrm{Isom}(S)) \geq \mathrm{aire}(T) = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{7} = \frac{\pi}{42}$$

et donc

$$\frac{\#\mathrm{Isom}(S)}{4(\mathrm{genre}(S) - 1)} = \frac{\pi}{\mathrm{aire}(S/\mathrm{Isom}(S))} \leq 42.$$

Merci !