MAXIME FORTIER BOURQUE

APPLICATIONS QUASICONFORMES
ET
SOUDURE CONFORME

Mémoire présenté
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de maîtrise en mathématiques
pour l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2010

Résumé

On expose les grandes lignes de la théorie des applications quasiconformes. On traite notamment en détail du théorème de Beurling-Ahlfors sur le prolongement à la frontière des homéomorphismes quasiconformes du demi-plan supérieur. On utilise ensuite ce résultat ainsi que le théorème d'existence et d'unicité de Morrey, également connu sous le nom de théorème de Riemann mesurable, pour démontrer le théorème fondamental de la soudure conforme. Ce dernier affirme que toute quasisymétrie de la droite réelle est la fonction soudante d'un quasidisque essentiellement unique. Finalement, on montre comment toutes ces idées sont reliées à travers l'espace de Teichmüller universel.

Avant-propos

Un peu avant l'été 2009, le professeur Thomas Ransford me proposa de travailler sur le théorème de Riemann mesurable pour ma maîtrise. Ce sujet m'avait effrayé à l'époque. Alternativement, il me proposa d'étudier les empilements de cercles, ce qui m'accrocha plus facilement. J'ai passé l'été 2009 à lire l'excellent livre de Kenneth Stephenson sur le sujet (Ste05). Une application des empilements de cercles à laquelle je décidai de m'intéresser est la résolution numérique du problème de la soudure conforme par G. Brock Williams (Wil07). Pour discuter de soudure conforme, il fallait utiliser la théorie des applications quasiconformes, incluant le théorème de Riemann mesurable. Retour à la case départ. À la session d'hiver 2010, je suivis une lecture dirigée sur les applications quasiconformes dans le cadre de laquelle je donnai 9 exposés. Merci à Thomas pour ses précieuses notes manuscrites provenant d'un cours donné par Fred Gehring et d'un autre par Keith Carne. Merci également à ceux qui ont assisté assidûment aux exposés, notamment les professeurs Line Baribeau, Thomas Ransford et Jérémie Rostand. Finalement, j'adorai le sujet des applications quasiconformes, qui s'avèrent être la vedette du présent mémoire. Les empilements de cercles, qui auraient dû faire l'objet d'un cinquième chapitre, ont été laissés de côté, car sinon ce travail aurait été d'une ampleur démesurée. En rétrospective, j'aurais peut-être dû me fier au flair de Tom et accepter sa suggestion initiale. Cependant, mon parcours m'a permis de découvrir un vaste éventail de sujets que j'aimerais explorer davantage dans un avenir rapproché.

Je remercie profondément mon directeur de maîtrise Thomas Ransford pour m'avoir suggéré des sujets fidèles à mes goûts, m'avoir écouté avec patience et m'avoir guidé dans mes apprentissages tout en me laissant une grande liberté de création. Merci aussi de m'avoir incité à donner des exposés malgré ma gêne, ce qui m'a fait apprendre plus que n'importe quel cours magistral.

Merci à mes amis Quentin, Philippe, Jérôme et Malik. Merci de m'avoir écouté et de m'avoir aidé à résoudre certains problèmes rencontrés au cours de la rédaction de ce mémoire. Merci pour les commentaires et suggestions au sujet de ce mémoire.

Merci au professeur Christopher J. Bishop de l'université de Stony Brook pour avoir pris le temps de répondre à mes courriels et m'avoir fourni des références utiles sur la soudure conforme.

Merci au Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada et au Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies pour leur soutien financier.

Merci aux membres du jury pour leurs précieuses corrections.

Finalement, merci à l'amour de ma vie pour simplement tout.

À Vanessa

L'essence des mathématiques,
c'est la liberté.

Georg Cantor

Table des matières

Introduction

L'analyse complexe en séduit plus d'un par son élégance. C'est un mélange harmonieux d'algèbre, d'analyse et de géométrie. On s'intéressera ici aux deux derniers aspects, plus particulièrement à une branche de l'analyse complexe appelée *théorie géométrique des fonctions*. On oubliera la structure de corps de $\mathbb{C}$ qu'on verra plutôt comme le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. De plus, on se concentrera sur les biholomorphismes, aussi appelés transformations conformes.

Le théorème de représentation de Riemann constitue la pierre angulaire de la théorie géométrique des fonctions. Ce théorème stipule qu'entre deux domaines simplement connexes du plan, il existe toujours une transformation conforme, pourvu qu'aucun des deux domaines ne soit le plan en entier. On utilisera amplement ce résultat et on discutera de quelques-unes de ses généralisations.

Dans le cas multiplement connexe, les choses deviennent plus compliquées. Même si deux domaines multiplement connexes sont homéomorphes, il n'existe pas nécessairement de transformation conforme entre les deux. On peut alors se demander comment mesurer, parmi tous les homéomorphismes existant entre ces deux domaines, lesquels sont les plus près d'être conformes. Cette idée simple mène à la définition d'*application quasiconforme* et permet de comprendre le monde des domaines et, plus généralement, des surfaces de Riemann, multiplement connexes.

Aujourd'hui, l'étude des applications quasiconformes fait partie intégrante de la théorie géométrique des fonctions parce qu'elles sont un outil important, mais aussi parce qu'elles ont de nombreuses propriétés en commun avec les transformations conformes.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, on rappellera quelques résultats classiques sur les transformations conformes. Par la suite, au chapitre 2, on exposera les essentiels de la théorie des applications quasiconformes, des définitions de base au puissant théorème d'existence de Morrey. Le chapitre 3 sera encore consacré à l'étude des applications quasiconformes, mais cette fois sur un domaine particulier, le demi-plan supérieur. On y décrira le comportement à la frontière de ces applications. Finalement, le chapitre 4 portera sur le problème de la soudure conforme, qui s'énonce parfaitement en termes de transformations conformes seulement, mais dont la résolution bénéficie grandement de la théorie des applications quasiconformes. On y parlera aussi brièvement d'espaces de Teichmüller.

Chapitre 1

Transformations conformes

Tout au long de ce texte, nous travaillerons dans la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, qu'on peut voir comme le compactifié d'Alexandroff du plan complexe $\mathbb{C}$, muni de la carte $1/z$ au voisinage de l'infini. On peut représenter $\widehat{\mathbb{C}}$ par la sphère unité $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Ces deux modèles sont reliés par une transformation conforme très simple, soit la projection stéréographique. La distance sphérique s entre deux points de $\mathbb{S}^2$, soit la plus courte longueur d'une courbe sur la sphère les reliant, donne lieu à la même topologie que celle d'Alexandroff lorsque transposée à $\widehat{\mathbb{C}}$ par projection stéréographique. Pour n'importe quel ensemble $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$, la notation $\overline{E}$ désignera toujours l'adhérence de E par rapport à cette topologie. Par exemple, la droite réelle étendue $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est un cercle sur $\widehat{\mathbb{C}}$. Toute autre construction topologique, comme la frontière ∂E d'un ensemble $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$, sera faite relativement à la topologie de la sphère.

Une *transformation conforme* est un C^1-difféomorphisme entre deux domaines de la sphère qui préserve les angles et l'orientation. De façon équivalente, une transformation conforme est une fonction méromorphe et injective entre deux domaines de $\widehat{\mathbb{C}}$. Le point de départ de ce mémoire est le théorème de représentation de Riemann, prouvé rigoureusement par C. Carathéodory en 1912.

Théorème 1.1 (Théorème de représentation de Riemann)**.** *Soit $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ un domaine simplement connexe tel que $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ contient plus d'un point. Alors il existe une transformation conforme entre Ω et le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$.*

Notons qu'un domaine Ω est simplement connexe si et seulement si $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ est connexe. Le demi-plan supérieur n'est qu'un domaine de référence. En passant par cet intermédiaire, on obtient que toute paire de domaines simplement connexes qui ne sont pas la sphère ou la sphère privée d'un point sont *conformément équivalents*, c'est-à-dire qu'il existe une transformation conforme envoyant l'un sur l'autre. Ce résultat est surprenant car il illustre la grande flexibilité des transformations conformes, par opposition à la plupart des théorèmes classiques de l'analyse complexe qui traitent de la rigidité des fonctions holomorphes. Pensons au principe d'identité, au principe du maximum, au lemme de Schwarz, aux théorèmes de Liouville et Picard, etc. Aussi, l'analogue du théorème de Riemann est faux dans $\mathbb{R}^n$ pour $n > 2$. Joseph Liouville démontra que dans ce cas les seules transformations conformes sont des transformations de Möbius, c'est-à-dire des compositions d'inversions en des sphères et réflexions selon des plans. Ainsi, la boule unité n'est conformément équivalente qu'aux autres boules et aux demi-espaces. Il n'existe pas non plus de théorème de Riemann dans $\mathbb{C}^n$ pour $n > 1$. En effet, Henri Poincaré montra en 1907 que le polydisque $\mathbb{D}^n$ n'est pas biholomorphe à la boule unité.

Si on reste en dimension 2, il existe plusieurs façons de généraliser le théorème de Riemann. Une des premières est le théorème d'uniformisation pour les surfaces de Riemann, que nous énoncerons à la section 4.7.1. Une autre avenue est de se demander quelles hypothèses on peut rajouter pour avoir des conclusions plus fortes, par exemple la continuité à la frontière.

Une *courbe de Jordan* est une courbe simple fermée ou encore l'image du cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ par une fonction continue et injective dans $\widehat{\mathbb{C}}$. Le théorème de Jordan est bien connu comme étant intuitivement clair, mais difficile à démontrer rigoureusement.

Théorème 1.2 (Jordan)**.** *Soit Γ une courbe de Jordan dans $\widehat{\mathbb{C}}$. Le complémentaire $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ possède exactement deux composantes connexes.*

Un *domaine de Jordan* est un domaine de $\widehat{\mathbb{C}}$ dont la frontière est une courbe de Jordan. Par le théorème de Jordan, le complémentaire d'un domaine de Jordan est connexe. Par conséquent, un domaine de Jordan est simplement connexe. De plus, puisque son complémentaire contient plus d'un point, un domaine de Jordan est toujours conformément équivalent au demi-plan supérieur par le théorème de représentation de Riemann.

Notons que l'énoncé original par Riemann de son théorème sur les transformations conformes portait sur les domaines de Jordan (Pal91, p.419). Dans ce cas, on obtient en plus la continuité à la frontière (Pal91, Corollary 4.10, p.446).

Théorème 1.3 (Carathéodory-Osgood)**.** *Toute transformation conforme entre deux domaines de Jordan s'étend en un homéomorphisme entre les adhérences dans $\widehat{\mathbb{C}}$ de ces deux domaines.*

En fait, dans sa dissertation doctorale, Riemann énonça ce théorème comme cas particulier d'un problème géométrique plus général, aujourd'hui appelé problème de Riemann-Hilbert, qui demande de construire des fonctions continues sur $\overline{\mathbb{D}}$ et analytiques dans $\mathbb{D}$ qui satisfont certaines conditions données sur le cercle unité $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ (Weg99).

Un problème qui nous intéressera au chapitre 4, celui de la soudure conforme, s'inscrit dans cette veine de questions en demandant quel comportement à la frontière on peut prescrire à une fonction continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et conforme à l'intérieur. En fait, on travaillera plutôt avec une paire de fonctions et on voudra prescrire une relation entre les deux sur la frontière.

Commençons par l'observation suivante. Soit Ω un domaine de Jordan et $f : \mathbb{H} \to \Omega$ une transformation conforme dont l'existence est assurée par le théorème de représentation de Riemann. Par le théorème de Carathéodory-Osgood, f s'étend au bord et on a que $f|_{\overline{\mathbb{R}}} : \overline{\mathbb{R}} \to \partial\Omega$ est un homéomorphisme. Maintenant, par le théorème de Jordan, $\Omega^* := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$ est aussi un domaine de Jordan. Une transformation conforme g de $\mathbb{H}^* := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{H}}$ sur Ω^* nous donne donc un autre homéomorphisme $g|_{\overline{\mathbb{R}}} : \overline{\mathbb{R}} \to \partial\Omega^*$. Or, on a $\partial\Omega = \partial\Omega^*$, de sorte que la composée $\varphi := f|_{\overline{\mathbb{R}}}^{-1} \circ g|_{\overline{\mathbb{R}}}$ est un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{R}}$.

Cet homéomorphisme φ est appelé *fonction soudante* pour Ω. En un certain sens, il semble que l'on perd de l'information en passant de Ω à φ. On n'a gardé de f et de g que leur valeur à la frontière et, de plus, on a composé les deux fonctions ensemble de façon à ne plus pouvoir les dissocier. Le résultat surprenant du chapitre 4 est qu'en fait, pour une grande diversité de domaines Ω, appelés *quasidisques*, la fonction φ détient toute l'information qu'il y a à savoir, c'est-à-dire qu'on pourrait théoriquement récupérer le domaine Ω à partir de φ seulement.

Le problème inverse est intéressant. Quels homéomorphismes de $\overline{\mathbb{R}}$ peuvent être des fonctions soudantes ? On veut savoir pour quels homéomorphismes φ on peut trouver une paire de transformations conformes f et g dans des domaines de Jordan complémentaires telles que $g(x) = f(\varphi(x))$ sur $\overline{\mathbb{R}}$. En ce sens, la soudure conforme s'apparente au problème de Riemann-Hilbert.

Au-delà des questions d'existence et d'unicité, on peut se demander comment la forme du domaine Ω influence la fonction φ. En quelles propriétés analytiques de φ les propriétés géométriques de Ω se traduisent-elles ? Cette question a un volet global et un volet local. En fait, il semble que très peu de choses sont connues à ce sujet.

Bien que le concept de soudure conforme s'énonce dans le langage des transformations conformes, des outils pris hors de l'analyse complexe classique permettent de répondre plus facilement aux questions fondamentales sur le sujet. C'est pourquoi on introduira la théorie des applications quasiconformes. Le résultat le plus profond dans cette théorie est une autre généralisation du théorème de représentation de Riemann. Étant donné un domaine simplement connexe $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$, le théorème de Riemann revient à dire qu'il existe un homéomorphisme f de Ω sur $\mathbb{H}$ qui satisfait les équations de Cauchy-Riemann

$$f_x + i f_y = 0.$$

Le théorème de Riemann mesurable dit qu'on peut résoudre l'équation plus générale de Beltrami

$$f_x(z) + i f_y(z) = \mu(z)(f_x(z) - i f_y(z))$$

pour n'importe quelle fonction mesurable $\mu : \Omega \to \mathbb{C}$ de suprémum essentiel strictement inférieur à 1. On verra plus loin comment ce théorème peut être utilisé pour créer des transformations conformes qui ont le comportement que l'on désire.

Chapitre 2

Applications quasiconformes

Nous exposerons dans ce chapitre les éléments essentiels de la théorie des applications quasiconformes dans la sphère de Riemann. Cette théorie fut développée dans les années 1930 principalement par H. Grötzsch, O. Teichmüller, L. Ahlfors et L. Bers. Les applications quasiconformes généralisent les transformations conformes. Leur définition est assez souple pour qu'elles soient omniprésentes en mathématiques, mais suffisamment contraignante pour qu'elles préservent de nombreuses caractéristiques des transformations conformes. Les applications quasiconformes sont devenues un outil indispensable dans l'étude des surfaces de Riemann, la topologie et la géométrie des variétés de dimension 3, ainsi qu'en dynamique complexe.

Le lecteur est invité à se référer aux ouvrages (Ahl06), (LV73), (dFdM08) et (AIM09) pour un traitement plus détaillé et pour les démonstrations manquantes.

2.1 Module conforme

2.1.1 Quadrilatères topologiques

Définition 2.1. Un *quadrilatère* $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ est un domaine de Jordan Q ainsi que quatre points distincts z_1, z_2, z_3, z_4 marqués sur son bord dans le sens anti-horaire. Les arcs de Jordan joignant z_1 à z_2 et z_3 à z_4 dans le sens anti-horaire sont les *côtés horizontaux* de Q et les deux autres arcs les *côtés verticaux*.

Proposition 2.2. *Étant donné un quadrilatère Q, il existe un $M > 0$ et un unique* *homéomorphisme entre l'adhérence* $\overline{Q}$ *et celle d'un rectangle canonique* $R(0, M, M+i, i)$ *qui est conforme à l'intérieur de* Q *et fait correspondre les sommets.*

Démonstration. Soit d'abord f une transformation conforme de Q sur $\mathbb{H}$, dont l'existence est assurée par le théorème de représentation de Riemann. Par le théorème de Carathéodory-Osgood, la fontion f s'étend en un homéomorphisme de $\overline{Q}$ sur $\overline{\mathbb{H}}$. Quitte à appliquer une transformation de Möbius, on peut supposer que l'extension de f au bord satisfait $f(z_1) = -1$, $f(z_2) = 0$, $f(z_3) = \tau > 0$ et $f(z_4) = \infty$. La transformation de Schwarz-Christoffel

$$g(w) = \int_{-1}^{w} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta+1)(\zeta-\tau)}},$$

envoie alors $\mathbb{H}(-1, 0, \tau, \infty)$ conformément sur un rectangle $R'(0, -K, -K - iK', -iK')$ (Ahl78, p.238-239). Une rotation d'un demi-tour et une homothétie de rapport $1/K'$ toutes deux centrées à l'origine donnent alors un rectangle $R(0, M, M + i, i)$. La composition de ces transformations est homéomorphe sur $\overline{Q}$, conforme à l'intérieur et fait correspondre les sommets.

Supposons qu'il existe deux homéomorphismes conformes h_1 et h_2 de Q sur des rectangles canoniques R_1 et R_2. Supposons de plus que ces homéomorphismes sont continus au bord et font correspondre les sommets. La transformation conforme $h_2 \circ h_1^{-1}$ de R_1 sur R_2 peut être prolongée par réflexions répétées selon les côtés des rectangles en un automorphisme de $\mathbb{C}$. C'est donc une similitude de la forme $az+b$. Les conditions aux sommets $h_2 \circ h_1^{-1}(0) = 0$ et $h_2 \circ h_1^{-1}(i) = i$ impliquent que cette similitude est l'identité et donc $h_1 = h_2$. □

Définition 2.3. Soit $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ un quadrilatère et $R(0, M, M + i, i)$ son rectangle canonique associé. Le *module conforme* ou simplement *module* de $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ est le nombre

$$\operatorname{mod} Q(z_1, z_2, z_3, z_4) := M.$$

Exemple 2.4. Le module d'un rectangle $R(0, a, a+ib, ib)$ est le rapport base-hauteur a/b.

Exemple 2.5. Si $\tau > 0$, le module $M(\tau)$ de $\mathbb{H}(-1, 0, \tau, \infty)$ vaut

$$\left| \int_{-1}^{0} \frac{dt}{\sqrt{t(t+1)(t-\tau)}} \right| \Big/ \left| \int_{0}^{\tau} \frac{dt}{\sqrt{t(t+1)(t-\tau)}} \right|.$$

Puisque chaque rectangle $R(0, M, M + i, i)$ est conformément équivalent à un unique demi-plan marqué $\mathbb{H}(-1, 0, \tau, \infty)$ et vice versa, $M(\tau)$ est une bijection de $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. De plus, on peut montrer, en utilisant l'écriture comme quotient d'intégrales elliptiques ci-haut, que $M(\tau)$ est décroissante, continue et d'inverse continue, .

Remarque 2.6. On a que $\operatorname{mod} Q(z_1, z_2, z_3, z_4) = 1/\operatorname{mod} Q(z_2, z_3, z_4, z_1)$. En effet, il suffit de considérer le cas d'un rectangle, pour lequel l'énoncé est clair. On appelle parfois le quadrilatère $Q(z_2, z_3, z_4, z_1)$ le *conjugué* de $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Proposition 2.7. *Le module des quadrilatères est un invariant conforme. Plus précisément, si $f : U \to V$ est une transformation conforme entre deux domaines et si un quadrilatère $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ et sa frontière sont inclus dans U, alors*

$$\operatorname{mod} f(Q) = \operatorname{mod} Q,$$

où les sommets marqués pour $f(Q)$ sont respectivement $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ et $f(z_4)$.

De plus, si deux quadrilatères Q_1 et Q_2 ont le même module, alors il existe un homéomorphisme entre leur adhérence, conforme à l'intérieur et faisant correspondre les sommets.

Démonstration. Si g envoie Q conformément sur un rectangle canonique, alors $g \circ f^{-1}$ envoie $f(Q)$ conformément sur le même rectangle, avec correspondance des sommets. Le quadrilatère $f(Q)$ a donc le même module que Q.

Si $\operatorname{mod} Q_1 = \operatorname{mod} Q_2 = M$, alors par définition, Q_1 et Q_2 sont tous deux conformément équivalents au rectangle $R(0, M, M+i, i)$. Par conséquent, Q_1 et Q_2 sont conformément équivalents entre eux, avec correspondance des sommets. □

2.1.2 Familles d'arcs

Un défaut de la précédente définition du module d'un quadrilatère est qu'elle fait appel au théorème de représentation de Riemann qui est très peu constructif. Il appert que la notion de module peut être caractérisée autrement, en utilisant des idées de géométrie Riemannienne, point de vue qui se prête mieux aux approximations et généralisations.

Soit Γ une famille d'arcs γ de $(0,1), [0,1), (0,1]$ ou $[0,1]$ dans $\widehat{\mathbb{C}}$. On dira qu'une fonction Borel-mesurable $\rho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ est *admissible* si

$$\int_{\gamma \setminus \{\infty\}} \rho(z)\,|dz| \geq 1$$

pour tout arc $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma \setminus \{\infty\}$ est localement rectifiable. Un arc *localement rectifiable* est un arc tel que tout sous-arc compact a une longueur finie. On doit supposer qu'un arc est localement rectifiable pour pouvoir donner du sens à l'intégrale le long de celui-ci comme intégrale de Stieltjes. La raison pour laquelle on permet au départ que Γ contienne des arcs non localement rectifiables deviendra claire à la prochaine section, où on voudra étudier la famille $f(\Gamma)$ pour des fonctions f possiblement méchantes, pouvant envoyer des arcs localement rectifiables sur des arcs de dimension de Hausdorff strictement plus grande que 1. L'ensemble de toutes les fonctions de masse ρ admissibles est noté $\operatorname{adm}\Gamma$. Le *module* de la famille Γ est alors défini comme étant 0 si $\operatorname{adm}\Gamma$ est vide et comme

$$\operatorname{mod}\Gamma := \inf\left\{\int_{\mathbb{C}} \rho^2\, dA : \rho \in \operatorname{adm}\Gamma\right\}$$

sinon. L'intégration par rapport à dA est celle par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, soit l'aire habituelle.

La quantité $1/\operatorname{mod}\Gamma$ correspond à ce qui est connu comme la *longueur extrémale* de la famille Γ (Ahl73, p.51), même si la définition que nous donnons ici et celle d'Ahlfors diffèrent à première vue. Ces deux notions permettent de démontrer de nombreux résultats concernant les transformations conformes. Entre autres, elles simplifient grandement la théorie des "prime ends" de Carathéodory menant à la démonstration du théorème de Carathéody-Osgood. Aussi, une généralisation de la longueur extrémale appelée "transboundary extremal length" fut introduite par O. Schramm en 1995 pour démontrer la version dénombrable de la conjecture de Koebe sur l'uniformisation de domaines quelconques de la sphère en domaines circulaires (Sch95).

Le module jouit de propriétés de monotonicité, de sous-additivité et est relié à des quantités géométriques simples, mais sa propriété clé est son invariance conforme.

Proposition 2.8. *Le module d'une famille d'arcs dans $\widehat{\mathbb{C}}$ est un invariant conforme.*

Démonstration. Soient U un domaine de la sphère, Γ une famille d'arcs dans U et f une transformation conforme de U sur un domaine V. D'abord notons qu'une fonction g continûment différentiable envoie chaque arc localement rectifiable sur un arc localement rectifiable, puisque sur chaque compact C le théorème de la moyenne nous donne

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq \max_{z\in C} \|Dg(z)\| \cdot |z_1 - z_2|$$

et donc, localement, g étire la longueur d'un arc par un facteur fini. Puisque la transformation conforme f et son inverse sont continûment différentiables, $f(\gamma)$ est localement rectifiable si et seulement si γ l'est. Pour chaque $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, construisons une fonction de masse $\tilde{\rho}$ admissible pour $f(\Gamma)$. On peut définir $\tilde{\rho}$ de sorte que

$$\rho(z) = \tilde{\rho}(f(z))|f'(z)|$$

pour $z \in U \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$ et que $\tilde{\rho}(w)$ s'annule partout ailleurs. La fonction de masse ainsi définie est Borel-mesurable. Pour chaque $f(\gamma) \in \Gamma$ localement rectifiable, on a que γ est localement rectifiable, donc la règle de changement de variables s'applique et donne

$$\begin{aligned}\int_{f(\gamma)\setminus\{\infty\}} \tilde{\rho}(w)|dw| &= \int_{f(\gamma)\setminus\{f(\infty),\infty\}} \tilde{\rho}(w)|dw| \\ &= \int_{\gamma\setminus\{\infty,f^{-1}(\infty)\}} \tilde{\rho}(f(z))|f'(z)||dz| \\ &= \int_{\gamma\setminus\{\infty,f^{-1}(\infty)\}} \rho(z)|dz| = \int_{\gamma\setminus\{\infty\}} \rho(z)|dz| \geq 1,\end{aligned}$$

de sorte que $\tilde{\rho} \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$.

Nous allons maintenant calculer l'aire relative à cette fonction de masse $\tilde{\rho}$. Tout d'abord, notons que si $f = u + iv$, où u et v sont réelles, alors

$$|f'|^2 = |f_x|^2 = u_x^2 + v_x^2 = u_x v_y - v_x u_y = |J_f|$$

par les équations de Cauchy-Riemann. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} \tilde{\rho}(w)^2 dA &= \int_{V\setminus\{f(\infty),\infty\}} \tilde{\rho}(w)^2 dA \\ &= \int_{U\setminus\{\infty,f^{-1}(\infty)\}} \tilde{\rho}(f(z))^2 |J_f(z)| dA \\ &= \int_{U\setminus\{\infty,f^{-1}(\infty)\}} \tilde{\rho}(f(z))^2 |f'(z)|^2 dA \\ &= \int_{U\setminus\{\infty,f^{-1}(\infty)\}} \rho(z)^2 dA \\ &\leq \int_{\mathbb{C}} \rho(z)^2 dA.\end{aligned}$$

En prenant l'infimum sur toutes les fonctions de masse ρ admissibles, on obtient que $\operatorname{mod} f(\Gamma) \leq \operatorname{mod} \Gamma$. Puisque f^{-1} est aussi une transformation conforme, on a également $\operatorname{mod} \Gamma = \operatorname{mod} f^{-1}(f(\Gamma)) \leq \operatorname{mod} f(\Gamma)$, donc il y a égalité $\operatorname{mod} f(\Gamma) = \operatorname{mod} \Gamma$.

$\square$

Remarque 2.9. Puisque le module d'une famille d'arcs est un invariant conforme et puisque la projection stéréographique est une transformation conforme, il n'y a pas de différence si on intègre ρ et ρ^2 contre les éléments de longueur et d'aire sphériques au lieu d'euclidiens pour calculer le module.

Il est maintenant temps de relier cette nouvelle notion de module d'une famille de courbes au module d'un quadrilatère introduit à la section précédente.

Proposition 2.10. *Soit Q un quadrilatère et Γ la famille des arcs internes à Q joignant ses côtés horizontaux. Alors, on a l'égalité*

$$\operatorname{mod} Q = \operatorname{mod} \Gamma.$$

De plus, l'égalité

$$\operatorname{mod} \Gamma = \int_{\mathbb{C}} \rho^2 \, dA$$

pour $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$ a lieu si et seulement si $\rho(z) = |f'(z)|$ presque partout dans Q et $\rho(z) = 0$ presque partout ailleurs, où f est la transformation conforme envoyant Q sur son rectangle canonique associé.

Démonstration. Puisque les deux notions de module sont des invariants conformes, il suffit de traiter le cas où Q est un rectangle de base $M := \operatorname{mod} Q$ et de hauteur 1. Par la règle de changement de variables qu'on a vue au cours de la démonstration de la proposition 2.8, la deuxième partie de l'énoncé est équivalente à avoir $\rho(z) = 1$ presque partout dans Q et $\rho(z) = 0$ presque partout ailleurs, dans le cas où Q est déjà un rectangle canonique.

Pour chaque $u \in (0, M)$, le segment vertical $(u, u+i)$ appartient à Γ, donc si ρ est admissible on a

$$1 \leq \left(\int_0^1 \rho(u+iv) \, dv \right)^2 \leq_{(*)} \left(\int_0^1 dv \right) \left(\int_0^1 \rho(u+iv)^2 \, dv \right) = \int_0^1 \rho(u+iv)^2 \, dv.$$

Notons que l'inégalité de Cauchy-Schwarz $(*)$ devient une égalité si et seulement si ρ est constante presque partout sur le segment $(u, u+i)$. Or, cette constante doit être 1 par la première inégalité. Nous y reviendrons à la fin de la démonstration.

Ainsi,

$$\iint_{\mathbb{C}} \rho^2 \, dA \geq \iint_{Q} \rho^2 \, dA = \int_0^M \int_0^1 \rho(u+iv)^2 \, dv du \geq M,$$

ce qui, en prenant l'infimum sur les ρ admissibles, donne l'inégalité $\operatorname{mod} \Gamma \geq \operatorname{mod} Q$.

Pour l'autre inégalité, il suffit de choisir $\rho(z) = 1$ si $z \in Q$ et zéro ailleurs. Si $\gamma \in \Gamma$ est localement rectifiable, on a $\int_\gamma |dz| \geq 1$ car γ joint les côtés horizontaux d'un rectangle de hauteur 1. Ainsi, ρ est admissible et on a bien sûr que $\int_{\mathbb{C}} \rho^2 dA = A(Q) = M$. Donc, $\operatorname{mod} \Gamma \leq \operatorname{mod} Q$. En combinant les deux inégalités on obtient le résultat.

Supposons qu'on ait l'égalité $\int_{\mathbb{C}} \rho^2 dA = M$ pour une fonction ρ admissible. Pour chaque $u \in (0, M)$, on a $\int_0^1 \rho(u+iv)^2 \, dv \geq 1$, mais $\int_0^M \int_0^1 \rho(u+iv)^2 \, dv du \leq \int_{\mathbb{C}} \rho^2 dA = M$. Donc, on doit en fait avoir $\int_0^1 \rho(u+iv)^2 \, dv du = 1$ pour presque tout $u \in (0, M)$ et également $\rho(z) = 0$ presque partout dans $\mathbb{C} \setminus Q$. Pour chacun de ces u où l'égalité a lieu, on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz $(*)$, de sorte que $\rho(u + iv) = 1$ pour presque tout $v \in (0, 1)$. Par le théorème de Fubini, ρ vaut donc 1 presque partout dans Q. $\square$

Voici un exemple d'inégalité qui se démontre plus aisément en utilisant la deuxième définition du module.

Proposition 2.11. *Soit Q un quadrilatère. Soient $Q_1, Q_2 \subset Q$ des quadrilatères disjoints dont les côtés horizontaux sont inclus dans ceux de Q. Alors*

$$\operatorname{mod} Q \geq \operatorname{mod} Q_1 + \operatorname{mod} Q_2$$

et l'égalité a lieu si et seulement si Q_1 est envoyé sur un rectangle par la transformation conforme de Q sur son rectangle canonique et si $Q_2 = Q \setminus \overline{Q_1}$.

Démonstration. Puisque le module est un invariant conforme, on peut supposer dès le départ que Q est un rectangle de hauteur 1. On a dans ce cas

$$\operatorname{mod} Q = A(Q) \geq A(Q_1) + A(Q_2) \geq \operatorname{mod} Q_1 + \operatorname{mod} Q_2.$$

La deuxième inégalité tient du fait que la métrique ρ_j valant 1 sur Q_j et 0 ailleurs est une métrique admissible pour Γ_j l'ensemble des arcs reliant les côtés horizontaux de Q_j, pour $j = 1, 2$, donc

$$A(Q_j) = \int_{Q_j} 1^2 dA = \int_{\mathbb{C}} \rho_j^2 dA \geq \operatorname{mod} Q_j.$$

Si l'égalité a lieu, alors on a en particulier $A(Q_1) = \operatorname{mod} Q_1$, ce qui implique que l'application canonique f_1 de Q_1 sur un rectangle satisfait $|f_1'| = 1$ presque partout dans Q_1 par la deuxième partie de la proposition 2.10. Supposons que f_1' ne soit pas constante. Dans ce cas, elle sera ouverte puisqu'elle est holomorphe et donc l'aire de $f_1'(Q_1)$ est strictement positive. Il s'ensuit que $A(f_1'(Q_1) \setminus \mathbb{T}) > 0$, parce que l'aire du cercle est nulle. Puisque les difféomorphismes préservent les ensembles de mesure nulle par la règle de changement de variables, on a que $A(Q_1 \setminus f_1'^{-1}(\mathbb{T})) > 0$, ce qui contredit le fait que $|f_1'| = 1$ presque partout dans Q_1. Ainsi, f_1' est constante et donc f_1 est une similitude de la forme $e^{i\theta} z + b$, ce qui montre que Q_1 est déjà un rectangle. Le même raisonnement tient pour Q_2. Ainsi, Q_1 et Q_2 sont des rectangles disjoints dans Q et la somme de leurs bases est égale à la base de Q, donc $Q_2 = Q \setminus \overline{Q_1}$.

Réciproquement, si Q_1 est un rectangle de hauteur 1 dans Q et $Q_2 = Q \setminus \overline{Q_1}$ est connexe, alors Q_2 est un rectangle et la somme des longueurs des bases de Q_1 et Q_2 est égale à celle de Q, donc $\operatorname{mod} Q = \operatorname{mod} Q_1 + \operatorname{mod} Q_2$. $\square$

Cette inégalité est reliée à l'inégalité de Rengel qui permet d'approximer le module des quadrilatères de façon suffisamment efficace pour les démonstrations. Nous n'en aurons pas besoin ici. Le lecteur intéressé peut se référer à (LV73, p.22).

2.2 Définition géométrique

Définition 2.12. Soit $K \geq 1$. Un homéomorphisme préservant l'orientation $f : U \to V$ entre deux domaines est *K-quasiconforme* si, pour tout quadrilatère Q dont la fermeture est incluse dans U, on a

$$\frac{1}{K} \operatorname{mod} Q \leq \operatorname{mod} f(Q) \leq K \operatorname{mod} Q. \tag{2.1}$$

Une *application quasiconforme* est un homéomorphisme K-quasiconforme pour un certain K.

Remarque 2.13. Pour que (2.1) soit satisfaite, il suffit qu'une seule des deux inégalités soit vérifiée pour la totalité des quadrilatères, puisque l'autre découle en passant aux quadrilatères conjugués, grâce à la remarque 2.6.

Remarque 2.14. Il suit immédiatement de la définition que l'inverse d'une application K-quasiconforme est une application K-quasiconforme et que la composition d'une application K_1-quasiconforme avec une application K_2-quasiconforme est, si les domaines concordent, K_1K_2-quasiconforme. En particulier, l'ensemble des homéomorphismes quasiconformes d'un domaine dans lui-même forme un groupe sous l'opération de composition.

Le prochain théorème justifie en quelque sorte l'appelation “quasiconforme”.

Théorème 2.15. *Un homéomorphisme $f : U \to V$ est conforme si et seulement s'il est 1-quasiconforme.*

Démonstration. L'implication directe a été démontrée à la proposition 2.7. Pour la réciproque, soit Q un quadrilatère dont la fermeture est dans U et soit Q' son image par f. Puisque f est 1-quasiconforme, $M = \operatorname{mod} Q = \operatorname{mod} Q' = M'$. Soit g_1 l'application conforme de Q sur $R = R(0, M, M + i, i)$ et g_2 celle de Q' sur R. On va montrer que la composée $h := g_2 \circ f \circ g_1^{-1}$ est l'identité sur R. En effet, pour un $z \in R$ donné, considérons les rectangles R_1 et R_2 obtenus en divisant R par la verticale passant par z. Soit M_1 et M_2 leur module respectif, c'est-à-dire la longueur de leur base. On a $M = M_1 + M_2$. Posons $R'_j := h(R_j)$ et $M'_j := \operatorname{mod} R_j$. Puisque h est aussi 1-quasiconforme, on a $M'_1 = M_1$ et $M'_2 = M_2$. Ainsi, $M' = M = M_1 + M_2 = M'_1 + M'_2$

et, par la proposition 2.11, R_1' est un rectangle. Comme R_1 et R_1' sont des rectangles canoniques de même module, ils coïncident. Alors le segment vertical passant par z est envoyé sur lui-même par la fonction h. De façon similaire, h envoie le segment horizontal passant par z sur lui-même. On en conclut que $h(z)$, qui est à l'intersection de ces deux segments, est égal à z, et ce pour tout $z \in R$. Ceci implique que $f = g_2^{-1} \circ \mathrm{Id} \circ g_1 = g_2^{-1} \circ g_1$ est une transformation conforme sur Q. En recouvrant U par des quadrilatères, on voit que f est localement conforme, donc conforme puisqu'elle est injective. $\square$

2.3 Difféomorphismes quasiconformes

2.3.1 Transformations linéaires

Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire, représentée par la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On se permettra d'identifier $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ par l'isomorphisme habituel $(x, y) \mapsto x + iy$ et de passer d'une notation à l'autre.

En notation complexe on a $T(z) = (a+ic)x+(b+id)y = T_x x+T_y y$. En remplaçant x par $\frac{z+\bar{z}}{2}$ et y par $\frac{z-\bar{z}}{2i} = -\frac{i(z-\bar{z})}{2}$, cette égalité se réécrit comme

$$T(z) = \frac{1}{2}(T_x - iT_y)z + \frac{1}{2}(T_x + iT_y)\bar{z}.$$

Posons $A := \frac{1}{2}(T_x - iT_y)$ et $B := \frac{1}{2}(T_x + iT_y)$, des constantes que l'on supposera non nulles. Si on passe en coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$, on obtient

$$\begin{aligned}
T(re^{i\theta}) &= r\Big(Ae^{i\theta} + Be^{-i\theta}\Big) = r\Big(|A|e^{i\arg A}e^{i\theta} + |B|e^{i\arg B}e^{-i\theta}\Big) \\
&= re^{i\frac{\arg A+\arg B}{2}}\Big(|A|e^{i(\theta+\frac{\arg A-\arg B}{2})} + |B|e^{-i(\theta+\frac{\arg A-\arg B}{2})}\Big) \\
&=: re^{i\alpha}\Big(|A|e^{i(\theta+\beta)} + |B|e^{-i(\theta+\beta)}\Big) \\
&= re^{i\alpha}\Big[(|A| + |B|)\cos(\theta + \beta) + i(|A| - |B|)\sin(\theta + \beta)\Big].
\end{aligned}$$

Sous cette écriture, on voit que l'action de T peut se décomposer en une rotation d'angle $\beta = (\arg A - \arg B)/2$ suivie d'une dilatation de facteur $|A| + |B|$ dans l'axe des x, d'une dilatation de facteur $|A| - |B|$ dans l'axe des y (qui comprend une réflexion si $|A| < |B|$) et d'une rotation d'angle $\alpha = (\arg A + \arg B)/2$. Autrement dit, T possède la décomposition en valeurs singulières

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |A|+|B| & 0 \\ 0 & |A|-|B| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

En particulier, T envoie le cercle unité $\mathbb{T}$ sur une ellipse de demi grand axe de longueur $|A|+|B|$ et de demi petit axe de longueur $||A|-|B||$. Cette ellipse fait un angle $\alpha = (\arg A + \arg B)/2$ avec l'axe des x. De plus, $\max_\theta |T(e^{i\theta})| = |A|+|B|$ est atteint dans les directions $\theta = -\beta$ et $\theta = -\beta + \pi$, puis $\min_\theta |T(e^{i\theta})| = ||A|-|B||$ est atteint en $\theta = -\beta \pm \pi/2$.

On a aussi que

$$\det T = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} |A|+|B| & 0 \\ 0 & |A|-|B| \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = |A|^2 - |B|^2.$$

De plus, T préserve l'orientation si et seulement si $|A| > |B|$, donc si et seulement si son déterminant est strictement positif.

2.3.2 Difféomorphismes

Soient $U, V \subset \mathbb{R}^2$ des domaines. Si $f : U \to V$ est différentiable en un point $z_0 \in U$, alors pour $z \in U$ on a

$$f(z) - f(z_0) = [Df(z_0)](z - z_0) + o(|z - z_0|),$$

où $[Df(z_0)] : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire.

On pose

$$\partial f(z_0) := \frac{1}{2}(f_x(z_0) - i f_y(z_0)),$$

$$\overline{\partial} f(z_0) := \frac{1}{2}(f_x(z_0) + i f_y(z_0)),$$

$$\partial_\theta f(z_0) := \lim_{r \downarrow 0} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{re^{i\theta}} = e^{-i\theta}[Df(z_0)](e^{i\theta})$$

et

$$J_f(z_0) := \det[Df(z_0)].$$

Par les calculs qui précèdent sur les transformations linéaires, on a

$$\max_\theta |\partial_\theta f(z_0)| = \max_\theta |[Df(z_0)](e^{i\theta})| = |\partial f(z_0)| + |\overline{\partial} f(z_0)|,$$

$$\min_\theta |\partial_\theta f(z_0)| = ||\partial f(z_0)| - |\overline{\partial} f(z_0)||$$

et

$$J_f(z_0) = |\partial f(z_0)|^2 - |\overline{\partial} f(z_0)|^2.$$

En particulier, si f est un homéomorphisme différentiable et $J_f(z_0) \neq 0$, alors f préserve l'orientation si et seulement si $J_f(z_0) > 0$.

Théorème 2.16. *Si $f : U \to V$ est K-quasiconforme et différentiable en $z_0 \in U$, alors*

$$\max_\theta |\partial_\theta f(z_0)| \leq K \min_\theta |\partial_\theta f(z_0)|.$$

Pour la démonstration, voir (LV73, Theorem 9.3, p.50). En multipliant les deux côtés de l'inégalité par $\max_\theta |\partial_\theta f(z_0)|$, on obtient

$$\begin{aligned} \|Df(z_0)\|_2^2 = \max_\theta |[Df(z_0)](e^{i\theta})|^2 &= \max_\theta |\partial_\theta f(z_0)|^2 \\ &\leq K \max_\theta |\partial_\theta f(z_0)| \min_\theta |\partial_\theta f(z_0)| = K J_f(z_0). \end{aligned}$$

C'est une autre façon fréquemment utilisée d'écrire cette inégalité.

On a aussi la réciproque (LV73, Theorem 3.1, p.18).

Théorème 2.17. *Si $f : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme préservant l'orientation et si*

$$\max_\theta |\partial_\theta f(z)| \leq K \min_\theta |\partial_\theta f(z)|$$

pour tout $z \in U$, alors f est K-quasiconforme.

Si f est un C^1-difféomorphisme, alors son Jacobien J_f est non nul en tout point, puisque la linéarisation $[Df(z_0)]$ de f est inversible. Si de plus f préserve l'orientation, alors $J_f > 0$. En particulier, on a $\min_\theta |\partial_\theta f(z_0)| = |\partial f(z_0)| - |\overline{\partial} f(z_0)| > 0$, donc le *quotient de dilatation*

$$D_f(z) := \frac{\max_\theta |\partial_\theta f(z)|}{\min_\theta |\partial_\theta f(z)|} = \frac{|\partial f(z)| + |\overline{\partial} f(z)|}{|\partial f(z)| - |\overline{\partial} f(z)|}$$

est bien défini. Sous ces hypothèses, les deux derniers théorèmes peuvent se reformuler de la façon suivante : f est K-quasiconforme si et seulement si son quotient de dilatation D_f est majoré par K. Remarquons que lorsque f est linéaire, le quotient D_f mesure l'excentricité de l'ellipse $f(\mathbb{T})$, c'est-à-dire le rapport de son grand axe sur son petit axe. Dans le cas où f est un C^1-difféomorphisme qui préserve l'orientation, alors f

est approximée localement par sa linéarisation $[Df(z_0)]$ et on peut dire que f est K-quasiconforme si elle envoie les cercles infinitésimaux sur des ellipses d'excentricité au plus K.

Si f est un difféomorphisme qui préserve l'orientation, alors le raisonnement précédent montre qu'on a équivalence entre ces énoncés :

1. f est conforme ;
2. f est 1-quasiconforme ;
3. f envoie les cercles infinitésimaux sur des cercles infinitésimaux ;
4. $D_f = 1$;
5. $|\partial f| + |\overline{\partial} f| = |\partial f| - |\overline{\partial} f|$;
6. $\overline{\partial} f = 0$;
7. f satisfait les équations de Cauchy-Riemann,

ce qui est bien connu.

Définition 2.18. Soit f un C^1-difféomorphisme préservant l'orientation. Alors le quotient
$$\mu_f := \overline{\partial} f / \partial f$$
est appelé *dilatation complexe* de f ou *coefficient de Beltrami* de f.

Remarque 2.19. On a $|\partial f|^2 - |\overline{\partial} f|^2 = J_f > 0$, donc $|\partial f| > |\overline{\partial} f|$, ce qui implique que $|\mu_f| < 1$. De plus, on a les relations
$$|\mu_f| = \frac{D_f - 1}{D_f + 1} \quad \text{et} \quad D_f = \frac{1 + |\mu_f|}{1 - |\mu_f|},$$
de sorte que
$$|\mu_f| \leq \frac{K-1}{K+1} < 1 \iff D_f \leq K.$$

La dilatation complexe de f encode une bonne partie de ses propriétés locales. En effet, son module $|\mu_f|$ permet de retrouver le quotient de dilatation D_f qui lui mesure le rapport des dilatations maximales et minimales de f en chaque point. Aussi, son argument nous donne la direction qui subit le plus de dilatation, soit
$$\frac{1}{2} \arg \mu_f = \frac{\arg \overline{\partial} f - \arg \partial f}{2} = \frac{\arg B - \arg A}{2} = -\beta$$
dans les notations de la section 2.3.1.

Cela soulève deux questions importantes. À quel point la dilatation complexe μ_f détermine-t-elle f ? Peut-on reconstruire f à partir de μ_f, soit résoudre l'équation différentielle de Beltrami $\overline{\partial} f = \mu_f \partial f$? Pour les applications, on aura besoin d'étudier ces questions dans un contexte plus général que celui des difféomorphismes, soit celui des homéomorphismes quasiconformes au sens de la définition 2.12, qui ne sont pas nécessairement des difféomorphismes. Pour donner un sens à μ_f dans ce contexte, il faut d'abord étudier la régularité des applications quasiconformes.

2.4 Définition analytique

Définition 2.20. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est *absolument continue* (AC) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour toute collection finie d'intervalles ouverts disjoints $(a_j, b_j) \subset [a,b]$ dont la somme des longueurs n'excède pas δ on a

$$\sum_j |f(a_j) - f(b_j)| < \varepsilon.$$

H. Lebesgue étudia les fonctions absolument continues dans sa célèbre thèse de doctorat sur l'intégration et établit un critère nécessaire et suffisant pour qu'une fonction satisfasse le théorème fondamental du calcul.

Théorème 2.21. *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est absolument continue si et seulement si f' existe presque partout, $f' \in L^1([a,b])$ et*

$$f(x) = \int_a^x f' dm + f(a)$$

pour tout x dans $[a,b]$.

On aura besoin d'une définition de continuité absolue dans le cas planaire.

Définition 2.22. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est *absolument continue sur les droites* (ACD) si pour chaque rectangle $R = [a,b] \times [c,d] \subset U$,

i) $x \mapsto f(x+iy)$ est absolument continue sur $[a,b]$ pour presque tout $y \in [c,d]$;

ii) $y \mapsto f(x+iy)$ est absolument continue sur $[c,d]$ pour presque tout $x \in [a,b]$.

Le résultat qui suit possède une très jolie démonstration (Ahl06, pp.31-32) qui utilise le fait qu'une fonction croissante est dérivable presque partout.

Théorème 2.23. *Soient $U, V \subset \mathbb{C}$ des domaines. Si $f : U \to V$ est quasiconforme, alors f est absolument continue sur les droites.*

Pour la suite, à moins d'avis contraire, U et V désigneront des domaines dans $\mathbb{C}$. Grâce au théorème de Lebesgue, on obtient le corollaire suivant, où "presque partout" fait référence à la mesure d'aire.

Corollaire 2.24. *Si $f : U \to V$ est quasiconforme, alors f possède des dérivées partielles presque partout dans U.*

Le théorème suivant est le plus difficile de ceux énoncés jusqu'à présent (LV73, Theorem 3.1, p.128).

Théorème 2.25 (Gehring-Lehto)**.** *Soient $U, V \subset \mathbb{R}^2$ des domaines. Si $f : U \to V$ est continue, ouverte et possède des dérivées partielles presque partout dans U, alors f est différentiable presque partout dans U.*

Remarque 2.26. On peut voir ce résultat comme une généralisation du théorème classique de calcul de fonctions à plusieurs variables à l'effet que l'existence de dérivées partielles dans un ouvert continues en un point implique la différentiabilité en ce point. Cependant, le résultat de Gehring et Lehto est propre à $\mathbb{R}^2$, puisqu'il devient faux en dimension plus élevée (AIM09).

Le théorème 2.23, le corollaire 2.24, le théorème de Gehring et Lehto et le théorème 2.16 sur les points de différentiabilité d'une application quasiconforme peuvent être combinés pour donner le corollaire suivant.

Corollaire 2.27. *Soient $U, V \subset \mathbb{C}$ des domaines. Si $f : U \to V$ est K-quasiconforme, alors*

1. *f est ACD dans U ;*
2. *f est différentiable presque partout dans U ;*
3. *$\|Df(z)\|_2^2 \le KJ_f(z)$ en chaque point de différentiabilité de f.*

Si $f : U \to V$ est un homéomorphisme qui préserve l'orientation et est différentiable presque partout, l'aire $A(f(E))$ définit une mesure σ-finie sur les boréliens $E \subset U$. On peut calculer que la partie absolument continue de cette mesure par rapport à la mesure de Lebesgue possède une dérivée de Radon-Nikodym égale à J_f presque partout. Le théorème de Radon-Nikodym donne alors que $\int_E J_f \, dA \le A(f(E))$. Si $C \subset U$ est un compact, alors $f(C)$ est compact et donc $A(f(C)) < \infty$. Ceci implique que J_f est localement intégrable (LV73, p.131). Cela s'applique en particulier si f est K-quasiconforme. Dans ce cas, on a de plus que $|f_x(z)|^2$ et $|f_y(z)|^2$ sont majorés par $\|Df(z)\|_2^2 = \max_\theta |\partial_\theta f(z)|^2$, qui lui est borné par $KJ_f(z)$ presque partout. Il suit que les dérivées partielles f_x et f_y sont localement L^2-intégrables.

On peut en déduire l'important résultat qui suit (Ahl06, Theorem 3, p.33) (Leh87, p.22).

Théorème 2.28. *Si $f : U \to V$ est quasiconforme et $E \subset U$ est Lebesgue-mesurable, alors*

1. $A(E) = 0 \iff A(f(E)) = 0$ *;*
2. $\int_E J_f \, dA = A(f(E))$ *;*
3. $J_f > 0$ *presque partout dans U.*

La première propriété stipule qu'une application quasiconforme préserve les ensembles d'aire nulle. Nous y référerons maintes fois dans les chapitres suivants.

Puisque le Jacobien d'une transformation quasiconforme est strictement positif presque partout, la dilatation minimale de f est strictement positive presque partout également. Autrement dit, on a $|\partial f| - |\overline{\partial} f| > 0$ presque partout, donc $|\partial f| > 0$ presque partout. Le quotient de dilatation D_f et dilatation complexe μ_f sont donc bien définis et bornés en fonction de la constante de quasiconformité K de f.

Corollaire 2.29. *Si $f : U \to V$ est K-quasiconforme, alors sa dilatation complexe $\mu_f = \overline{\partial} f / \partial f$ est bien définie presque partout et satisfait*

$$|\mu_f| \leq \frac{K-1}{K+1}$$

presque partout dans U.

On peut montrer la réciproque au corollaire 2.27, ce qui donne une caractérisation analytique des applications quasiconformes (Leh87, Theorem 3.5, p.22) (Ahl06, pp.24-33).

Théorème 2.30 (Définition analytique)**.** *Soient $U, V \subset \widehat{\mathbb{C}}$ des domaines et $f : U \to V$ un homéomorphisme qui préserve l'orientation. Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *f est K-quasiconforme ;*
2. *f est absolument continue sur les droites et satisfait $\|Df\|_2^2 \leq K J_f$ presque partout dans $U \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$;*
3. *f est absolument continue sur les droites et satisfait $D_f \leq K$ presque partout dans $U \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$;*
4. *f est absolument continue sur les droites et satisfait $|\mu_f| \leq \frac{K-1}{K+1}$ presque partout dans $U \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$.*

2.5 Théorème de représentation de Riemann mesurable

Nous sommes maintenant prêts à répondre aux questions concernant la dilatation complexe d'un homéomorphisme quasiconforme soulevées à la fin de la section 2.3.2 dans la généralité dont nous aurons besoin.

2.5.1 Unicité

La première de ces questions, cherchant à déterminer à quel point la dilatation complexe μ_f détermine un homéomorphisme quasiconforme, est la plus facile à traiter.

Lemme 2.31 (Lemme de Weyl)**.** *Si $f : U \to V$ est absolument continue sur les droites, alors $\overline{\partial} f = 0$ presque partout dans $U \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$ si et seulement si f est conforme.*

Démonstration. Si f est ACD et $|\mu_f| = 0 \leq \frac{1-1}{1+1}$ presque partout dans $U \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$, alors f est 1-quasiconforme sur U par le théorème 2.30, donc f est conforme.

Réciproquement, si f est conforme, alors elle satisfait les équations de Cauchy-Riemann dans $U \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$, qui sous forme compacte s'écrivent $\overline{\partial} f = 0$. □

Le lemme qui suit est une conséquence directe de la définition de différentiabilité et du calcul $T(z) = \partial T \cdot z + \overline{\partial} T \cdot \bar{z}$ qu'on a fait pour les transformations linéaires à la section 2.3.1.

Lemme 2.32 (Règle de dérivation en chaîne)**.** *Si g et f sont différentiables en z_0 et $w_0 := g(z_0)$ respectivement, alors $f \circ g$ est différentiable en z_0 et on a*

$$\partial(f \circ g)(z_0) = \partial f(w_0) \partial g(z_0) + \overline{\partial} f(w_0) \overline{\overline{\partial} g(z_0)}$$

$$\overline{\partial}(f \circ g)(z_0) = \partial f(w_0) \overline{\partial} g(z_0) + \overline{\partial} f(w_0) \overline{\partial g(z_0)}.$$

De plus, si g^{-1} est différentiable en w_0, alors

$$\partial g^{-1}(w_0) = \overline{\partial g(z_0)} / J_g(z_0) \quad \textit{et} \quad \overline{\partial} g^{-1}(w_0) = -\overline{\partial} g(z_0) / J_g(z_0).$$

Il ne suffit que d'un calcul et quelques simplifications pour obtenir la formule de la dilatation complexe d'une composée de fonctions. Le théorème d'unicité en découle directement.

Théorème 2.33 (Formule de transformation)**.** *Si f et g sont quasiconformes dans U, alors $h := f \circ g^{-1}$ est quasiconforme et*

$$\mu_h(g(z)) = \frac{\mu_f(z) - \mu_g(z)}{1 - \mu_f(z)\overline{\mu_g(z)}} \frac{\partial g(z)}{\overline{\partial g(z)}}$$

presque partout dans U.

Corollaire 2.34 (Théorème d'unicité)**.** *Si f et g sont quasiconformes dans U, alors $f \circ g^{-1}$ est conforme si et seulement si $\mu_f = \mu_g$ presque partout dans U.*

En d'autres termes, la dilatation complexe d'une fonction quasiconforme la détermine à composition à gauche par transformation conforme près.

2.5.2 Existence

La deuxième question qui nous intéressait était de savoir si l'application $f \mapsto \mu_f$ allant des applications K-quasiconformes vers les fonctions mesurables bornées par $(K-1)/(K+1)$ est surjective. Autrement dit, étant donné un coefficient de Beltrami μ uniformément borné par une constante plus petite que 1, peut-on trouver une application quasiconforme possédant μ pour dilatation complexe ? La réponse se trouve dans le théorème que voici.

Théorème 2.35 (Morrey, 1938)**.** *Soit μ une fonction mesurable d'un domaine U de la sphère vers $\mathbb{C}$ telle que $\|\mu\|_\infty < 1$. Alors il existe une application quasiconforme $f : U \to \widehat{\mathbb{C}}$ ayant μ pour dilatation complexe, c'est-à-dire telle que l'équation de Beltrami*

$$\overline{\partial} f = \mu\, \partial f$$

est vérifiée presque partout dans U. De plus, f est unique à composition par une transformation conforme près. Plus précisément, $g : U \to \widehat{\mathbb{C}}$ est quasiconforme avec $\mu_g = \mu = \mu_f$ si et seulement si $f \circ g^{-1} : g(U) \to f(U)$ est une transformation conforme.

Si on prend $U = \widehat{\mathbb{C}}$, alors une solution f à l'équation de Beltrami est un automorphisme quasiconforme de la sphère. Celle-ci est unique à transformation conforme de la sphère près, donc à transformation de Möbius près. On peut normaliser f pour qu'elle fixe trois points, par exemple $0, 1, \infty$. Une telle solution est alors unique puisqu'une transformation de Möbius fixant trois points est l'identité.

Notons que l'équation de Beltrami pour un coefficient μ suffisament lisse fut étudiée par Gauss dans les années 1820 pour montrer qu'une surface admet toujours des coordonnées isothermales. En 1938, Morrey montrait l'existence de solutions ayant des dérivées partielles localement L^2-intégrables dans le cas général où μ est mesurable. Ce n'est qu'en 1957 qu'Ahlfors et Bers remarquèrent que de telles solutions sont des applications quasiconformes. Leur nouvelle démonstration du théorème de Morrey donna en prime que les solutions, lorsque normalisées, varient analytiquement en fonction du coefficient μ (dFdM08).

Théorème 2.36 (Ahlfors-Bers, 1957)**.** *Soit* $0 < k < 1$ *et* $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ *un ouvert. Soit* $(\lambda, z) \mapsto \mu_\lambda(z)$ *une application qui satisfait que*

1. *pour chaque* $\lambda \in \Lambda$ *le coefficient de Beltrami* $\mu_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *est Lebesgue-mesurable et satisfait* $\|\mu_\lambda\|_\infty \leq k$ *;*
2. *pour presque tout* $z \in \mathbb{C}$*, l'application* $\lambda \mapsto \mu_\lambda(z)$ *est holomorphe.*

Alors si f_λ *désigne l'unique solution quasiconforme à l'équation de Beltrami* $\overline{\partial} f = \mu_\lambda \partial f$ *qui fixe* 0*,* 1 *et* ∞*, l'application*

$$\lambda \mapsto f_\lambda(z)$$

est holomorphe pour chaque $z \in \mathbb{C}$*.*

Dans (AB60), Ahlfors et Bers donnent plusieurs variantes de ce théorème, selon que le coefficient μ_λ varie de façon continue, différentiable ou analytique en fonction du paramètre réel ou complexe λ.

2.5.3 Conséquences

On peut affirmer sans trop se tromper que le théorème de Morrey et sa version raffinée par Ahlfors et Bers constituent les outils les plus puissants de la théorie des applications quasiconformes dans le plan. Pour illustrer en partie leur portée, nous énoncerons ici quelques corollaires immédiats portant sur les propriétés des applications quasiconformes.

Le raisonnement qui suit est très simple, mais montre essentiellement comment on utlise le théorème de Morrey en pratique.

Corollaire 2.37 (Principe de factorisation)**.** *Si* $f : U \to V$ *est* K*-quasiconforme, alors il existe une application* K*-quasiconforme* $g : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ *et une transformation conforme* $h : g(U) \to V$ *tel que* $f = h \circ g$ *sur* U*.*

Démonstration. Soit

$$\mu := \mu_f \cdot 1_U = \begin{cases} \mu_f & \text{sur } U \\ 0 & \text{sur } \widehat{\mathbb{C}} \setminus U. \end{cases}$$

Alors μ est mesurable et satisfait $\|\mu\|_\infty \leq \frac{K-1}{K+1} < 1$. Par le théorème d'existence de Morrey, il existe une application K-quasiconforme $g : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ telle que $\mu_g = \mu$. Puisque la restriction $\mu_g|_U$ coïncide avec μ_f, le théorème d'unicité 2.34 nous assure l'existence d'une transformation conforme $h : g(U) \to V$ telle que $f = h \circ g$ sur U. □

Ce principe de factorisation a d'importantes conséquences. Il réduit plusieurs questions au cas des transformations conformes et permet donc de généraliser plusieurs théorèmes de l'analyse complexe.

Corollaire 2.38 (Théorème de Liouville, version quasiconforme)**.** *L'image quasiconforme du plan complexe est toujours la sphère privée d'un point.*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{C} \to f(\mathbb{C}) \subset \widehat{\mathbb{C}}$ une application quasiconforme. Par le corollaire 2.37 qui précède, on peut factoriser f en $h \circ g$, où g est un automorphisme quasiconforme de la sphère et h est une transformation conforme de $g(\mathbb{C})$ sur $f(\mathbb{C})$. Puisque $\widehat{\mathbb{C}} = g(\widehat{\mathbb{C}}) = g(\mathbb{C}) \cup g(\{\infty\})$, le domaine $g(\mathbb{C})$ est la sphère privée d'un point. Sans perte de généralité, $g(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, puisque si ce n'est pas le cas il suffit de composer g à gauche par une transformation de Möbius envoyant $g(\infty)$ sur ∞ et h à droite par l'inverse de cette transformation. Comme $h : \mathbb{C} \to f(\mathbb{C})$ est une transformation conforme, $f(\mathbb{C})$ est aussi la sphère privée d'un point. En effet, si $\widehat{\mathbb{C}} \setminus f(\mathbb{C})$ possédait plus d'un point, alors il existerait une transformation conforme F de $f(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{D}$ puisque $f(\mathbb{C})$ est simplement connexe. La composée $F \circ h$ serait une fonction entière bornée, donc une constante par le théorème de Liouville, ce qui est impossible. □

Ainsi, l'équivalence quasiconforme divise les domaines simplement connexes de la même façon que l'équivalence conforme.

Le théorème d'existence de Morrey est parfois appelé théorème de représentation de Riemann mesurable (en anglais "measurable Riemann mapping theorem"). La reformulation suivante, plus faible, explique cette appelation.

Corollaire 2.39 (Théorème de représentation de Riemann mesurable)**.** *Soit U un sous-domaine simplement connexe du plan complexe qui soit différent du plan lui-même. Soit $\mu : U \to \mathbb{C}$ mesurable telle que $\|\mu\|_\infty < 1$. Alors il existe un homéomorphisme quasiconforme f de U sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ ayant μ pour dilatation complexe.*

Si on choisit μ constante égale à 0, on obtient un homéomorphisme quasiconforme f de U sur $\mathbb{H}$ qui satisfait $\overline{\partial} f = 0$ presque partout. On conclut par le lemme 2.31 que f est une transformation conforme. Le théorème de représentation de Riemann apparaît donc comme cas particulier du théorème de représentation de Riemann mesurable.

Démonstration. Soit $f = f_\mu$ la fonction donnée par le théorème de Morrey. On a que $f(U)$ est différent de la sphère privée d'un point, car sinon f^{-1} serait un contre-exemple au théorème de Liouville 2.38. Il suffit donc de composer f à gauche par une transformation conforme de $f(U)$ sur $\mathbb{H}$, qui existe parce que $f(U)$ est simplement connexe et que son complément a plus d'un point. La composée possède alors la même dilatation complexe μ par le corollaire 2.34. $\square$

Chapitre 3

Courbes et domaines de Jordan

3.1 Prolongement à la frontière

Si on a une application quasiconforme entre deux domaines de Jordan, il est légitime d'explorer son comportement à la frontière. Pour les transformations conformes, c'est déjà un sujet très riche (Pom92). On se contentera ici de caractériser ce comportement dans un cas normalisé, ce qui nous permettra plus tard de résoudre partiellement le problème de la soudure conforme.

Commençons par une version du théorème de Carathéodory-Osgood pour les applications quasiconformes.

Proposition 3.1 (Théorème de Carathéodory-Osgood, version quasiconforme)**.** *Si U et V sont deux domaines de Jordan et si $f : U \to V$ est une application quasiconforme, alors f se prolonge en un homéomorphisme de $\overline{U}$ sur $\overline{V}$.*

Démonstration. Par le corollaire 2.37, f peut s'écrire comme $h \circ g$ où g est un automorphisme quasiconforme de la sphère et h est une transformation conforme. On a alors que $g(U)$ est un domaine de Jordan. Par le théorème de Carathéodory-Osgood, h se prolonge en un homéomorphisme $h^* : \overline{g(U)} \to \overline{V}$. La fonction $h^* \circ g : \overline{U} \to \overline{V}$ est alors le prolongement recherché. □

Pour étudier plus aisément le comportement au bord d'une application quasiconforme entre domaines de Jordan, on peut se ramener, via le théorème de représentation de Riemann classique, à un homéomorphisme du demi-plan supérieur sur lui-même, ce qui ne change pas la dilatation maximale.

Le lemme suivant nous permettra de montrer qu'un tel homéomorphisme s'étend à toute la sphère sans modifier la constante de dilatation.

Lemme 3.2. *Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ qui intersecte l'axe réel. Soit $f : U \to f(U) \subset \mathbb{C}$ un homéomorphisme qui soit K-quasiconforme dans chacune des composantes de $U \setminus \mathbb{R}$. Alors f est K-quasiconforme dans U.*

Démonstration. Ce résultat est bien connu pour les fonctions F continues sur U et holomorphes dans $U\setminus\mathbb{R}$. Dans ce cas, il se démontre facilement en appliquant le théorème de Morera et une légère généralisation du théorème de Cauchy (Pal91, p. 453). L'idée est de montrer que l'intégrale de F autour de tout rectangle dans U s'annulle, en séparant les rectangles traversant l'axe réel en deux rectangles reposant de part et d'autre de l'axe.

Passons au cas où f est K-quasiconforme. Considérons l'inverse f^{-1} qui est K-quasiconforme dans chacune des composantes de $f(U \setminus \mathbb{R}) = f(U) \setminus f(\mathbb{R})$. On forme le coefficient de Beltrami $\mu = \mu_{f^{-1}} 1_{f(U)\setminus f(\mathbb{R})}$ dans $f(U)$. Ce dernier est mesurable, satisfait $\|\mu\|_\infty \leq \frac{K-1}{K+1}$ et coïncide avec $\mu_{f^{-1}}$ dans $f(U) \setminus f(\mathbb{R})$. Soit $g = g_\mu$ une application quasiconforme ayant μ pour coefficient de dilatation sur $f(U)$. Sur chaque composante de $U \setminus \mathbb{R}$, on a, par la partie unicité du théorème de Morrey, que la composée $h := g \circ f$ est une transformation conforme. Tel que remarqué plus haut, l'homéomorphisme h est alors conforme dans tout U. Il s'ensuit que $f = g^{-1} \circ h$ est K-quasiconforme sur U. □

Proposition 3.3 (Réflexion quasiconforme)**.** *Soit $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ une application K-quasiconforme du demi-plan supérieur. Alors f se prolonge en un homéomorphisme K-quasiconforme de $\widehat{\mathbb{C}}$ dans $\widehat{\mathbb{C}}$. Le prolongement peut être choisi de sorte à satisfaire la relation $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. Par la proposition 3.1, f se prolonge en un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{H}}$ sur lui-même. Pour $\bar{z} \in \mathbb{H}$, on définit $f(z)$ par $\overline{f(\bar{z})}$. Le prolongement ainsi obtenu est un homéomorphisme de $\widehat{\mathbb{C}}$ dans $\widehat{\mathbb{C}}$, quasiconforme dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Par le lemme 3.2, f est en fait K-quasiconforme dans tout $\mathbb{C} \setminus f^{-1}(\infty)$. Finalement, on peut rajouter le point à l'infini et sa préimage par le théorème 2.30 sur la caractérisation analytique des applications quasiconformes. □

3.2 Plongements quasimöbius

3.2.1 Transformations de Möbius et birapport

Chaque transformation de Möbius

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $ad - bc \neq 0$, est un automorphisme conforme de la sphère de Riemann et réciproquement. Cependant, la multiplication du quadruplet a, b, c, d par un scalaire ne change en rien la transformation initiale. Cette ambiguité est réduite à une ambiguité de signe si on normalise par $ad - bc = 1$. Autrement dit, le groupe de tous les automorphismes conformes de la sphère, noté $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$, est isomorphe au groupe de matrices $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) := \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\{\mathbb{C}^\times \mathrm{Id}\}$ ou encore $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm \mathrm{Id}\}$, où $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ désigne le groupe des matrices n par n à éléments dans l'anneau $\mathbb{A}$ qui sont inversibles et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{A})$ le sous-groupe des matrices de déterminant 1. Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ lui est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Une propriété qui caractérise les transformations de Möbius est qu'elles envoient les cercles sur des cercles. Notons qu'un cercle sur la sphère de Riemann correspond à un cercle ou une droite dans le plan par la projection stéréographique.

Une autre façon de décrire complètement les transformations de Möbius est de dire qu'elles préservent le *rapport anharmonique* ou *birapport*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] := \frac{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}$$

de tout quadruplet de points distincts. Si un des quatre points est l'infini, on définit le birapport par la limite appropriée. Par exemple,

$$[z_1, z_2, z_3, \infty] = \frac{(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)}.$$

Remarquons que l'ordre des points a de l'importance et qu'il n'y pas de convention ferme à cet égard. Notre choix coïncide avec celui de Beurling et Ahlfors dans (BA56). Avec cet ordre, le birapport de quatre points formant un carré est 1. Aussi, l'unique transformation de Möbius qui envoie trois points z_1,z_2,z_4 sur $-1, 0, \infty$ respectivement est $z \mapsto [z_1, z_2, z, z_4]$. Le birapport $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ est alors l'image de z_3 par cette transformation de Möbius.

Cette interprétation permet de voir que le birapport de quatre points est réel si et seulement si ces quatre points sont sur un cercle.

Enfin, il est élémentaire de calculer que le birapport est invariant sous les permutations (12)(34), (13)(24) et (14)(23) du groupe de Klein $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et qu'il est inversé par la permutation circulaire (1234) :

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [z_2, z_3, z_4, z_1]^{-1} = [z_3, z_4, z_1, z_2] = [z_4, z_1, z_2, z_3]^{-1}.$$

Pour un traitement géométrique détaillé des transformations de Möbius, le lecteur est référé à (Nee97, Chapitre 3) ou à (MSW02).

3.2.2 Module et birapport

Soit $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ une application K-quasiconforme du demi-plan supérieur. Alors on a vu à la proposition 3.3 que f s'étend par réflexion à toute la sphère sans changer la constante K. En particulier, f préserve aussi à un facteur K près le module des quadrilatères Q tels que $\overline{Q} \subset \overline{\mathbb{H}}$, pas seulement ceux tels que $\overline{Q} \subset \mathbb{H}$.

Si $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{R}}$ est un quadruplet orienté positivement par rapport à $\mathbb{H}$, on forme le quadrilatère $Q := \mathbb{H}(a, b, c, d)$ d'image $Q' = \mathbb{H}(f(a), f(b), f(c), f(d))$ et alors on doit avoir $\frac{1}{K} \operatorname{mod} Q \leq \operatorname{mod} Q' \leq K \operatorname{mod} Q$.

On veut maintenant déduire des informations sur $f|_{\overline{\mathbb{R}}}$ à partir de cette dernière inégalité. La première constatation est que $\operatorname{mod} Q$ dépend uniquement du birapport $\tau := [a, b, c, d]$. En effet, la transformation conforme $z \mapsto [a, b, z, d]$ envoie Q sur $\mathbb{H}(-1, 0, \tau, \infty)$ qui a alors le même module. Notons que τ est positif dû à la position relative des points a, b, c, d. On a déjà rencontré la fonction

$$M(\tau) = \operatorname{mod} \mathbb{H}(-1, 0, \tau, \infty) = \operatorname{mod} Q$$

à l'exemple 2.5, où on avait une formule explicite en termes d'intégrales elliptiques. On pourrait donner des estimés précis pour $M(\tau)$ comme dans (BA56). Pour nos fins, il suffira cependant d'utiliser le fait que M est un homéomorphisme décroissant de $\mathbb{R}^+$, tel qu'on l'a remarqué précédemment.

Avant de poursuivre, notons l'identité remarquable $M(\tau)M(1/\tau) = 1$, qui tient puisque $[0, \tau, \infty, -1] = 1/\tau$ et que $\operatorname{mod} \mathbb{H}(0, \tau, \infty, -1) = 1/ \operatorname{mod} \mathbb{H}(-1, 0, \tau, \infty)$, ces deux derniers quadrilatères étant conjugués. En particulier, on a $M(1) = 1$.

Si on note $\tau' := [f(a), f(b), f(c), f(d)]$, alors on a l'inégalité

$$\frac{1}{K} M(\tau) \leq M(\tau') \leq K M(\tau).$$

Puisque M^{-1} est décroissante, on a donc

$$M^{-1}(M(\tau)/K) \geq \tau' \geq M^{-1}(KM(\tau)).$$

Remarquons que la fonction $t \mapsto \omega(t) := M^{-1}(M(t)/K)$ est un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ et que $M^{-1}(KM(t)) = \omega^{-1}(t)$. On peut également déduire que $\omega^{-1}(t) = 1/\omega(1/t)$ à partir de l'identité $M(t)M(1/t) = 1$. La dernière inégalité peut donc se réécrire

$$1/\omega(1/\tau) = \omega^{-1}(\tau) \leq \tau' \leq \omega(\tau).$$

Autrement dit, l'application f peut modifier le birapport de 4 points de $\overline{\mathbb{R}}$ jusqu'à une certaine borne, quantifiée par la fonction de distorsion ω.

Ceci motive la définition suivante, apparaissant pour la première fois dans (Väi85).

Définition 3.4. Soit $\eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ un homéomorphisme croissant qu'on appellera *fonction de distorsion*. Soit $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$ et $\varphi : A \to \widehat{\mathbb{C}}$ un plongement, c'est-à-dire une fonction continue injective. Si

$$|[\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c), \varphi(d)]| \leq \eta(|[a, b, c, d]|)$$

pour tout quadruplet de points distincts $a, b, c, d \in A$, alors on dira que φ est *η-quasimöbius*. S'il existe un η tel que φ est η-quasimöbius, alors on dira simplement que φ est *quasimöbius*.

Remarque 3.5. Si le plongement φ est η-quasimöbius, il vérifie en fait une double inégalité. Soit $\tau := |[a, b, c, d]|$ et $\tau' := |[\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c), \varphi(d)]|$. Alors on a

$$\tau'^{-1} = |[\varphi(b), \varphi(c), \varphi(d), \varphi(a)]| \leq \eta(|[b, c, d, a]|) = \eta(\tau^{-1})$$

de sorte que

$$1/\eta(1/\tau) \leq \tau' \leq \eta(\tau).$$

Cette dernière inégalité montre qu'on doit avoir $\eta(1) \geq 1$ pour qu'il existe des plongements η-quasimöbius.

On a le théorème suivant.

Théorème 3.6. *Soit $K \geq 1$. Alors il existe un homéomorphisme croissant η de $\mathbb{R}^+$ tel que pour toute application K-quasiconforme $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, la restriction au bord $f|_{\overline{\mathbb{R}}}$ est η-quasimöbius.*

Démonstration. Au cours des lignes précédentes on a montré que

$$1/\omega(1/\tau) = \omega^{-1}(\tau) \leq \tau' \leq \omega(\tau)$$

avec $\omega(t) = M^{-1}(M(t)/K)$, lorsque τ est le birapport de quatre points de $\overline{\mathbb{R}}$ orientés positivement par rapport à $\mathbb{H}$. Il faut maintenant montrer qu'on a une inégalité semblable peu importe l'ordre relatif des points.

Soit $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{R}}$. On cherche une fonction de distorsion η telle que

$$|[f(a), f(b), f(c), f(d)]| \leq \eta(|[a, b, c, d]|).$$

On sait que f s'étend en un automorphisme K-quasiconforme de $\widehat{\mathbb{C}}$ par réflexion. En composant f à gauche par $z \mapsto [f(a), f(b), z, f(d)]$ et à droite par l'inverse de $z \mapsto [a, b, z, d]$, on obtient un automorphisme K-quasiconforme g de $\widehat{\mathbb{C}}$ qui envoie $\overline{\mathbb{R}}$ sur lui-même et fixe $-1, 0, \infty$.

Si $\tau := [a, b, c, d] = [-1, 0, \tau, \infty]$, alors $\tau' := [f(a), f(b), f(c), f(d)]$ satisfait

$$\tau' = [g(-1), g(0), g(\tau), g(\infty)] = [-1, 0, g(\tau), \infty] = g(\tau),$$

parce que les transformations de Möbius préservent le birapport.

Il y a trois cas à considérer, dépendamment de l'emplacement de τ, soit dans $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ ou $(0, +\infty)$. Remarquons que τ' se trouve dans le même intervalle que τ puisque g préserve l'orientation.

Si $\tau \in (0, +\infty)$, alors les quatre points $-1, 0, \tau, \infty$ sont orientés positivement par rapport à $\mathbb{H}$ et on a

$$|\tau'| = \tau' \leq \omega(\tau) = \omega(|\tau|).$$

Si $\tau \in (-1, 0)$, alors les points $-1, \tau, 0, \infty$ sont dans l'ordre et on a

$$\frac{-\tau'}{1 + \tau'} = [-1, \tau', 0, \infty] \leq \omega([-1, \tau, 0, \infty]) = \omega\left(\frac{-\tau}{1 + \tau}\right).$$

Une simple manipulation nous permet d'arriver à

$$|\tau'| = -\tau' \leq \frac{\omega\left(\frac{-\tau}{1+\tau}\right)}{1 + \omega\left(\frac{-\tau}{1+\tau}\right)} = \frac{\omega\left(\frac{|\tau|}{1-|\tau|}\right)}{1 + \omega\left(\frac{|\tau|}{1-|\tau|}\right)}.$$

Pour $t \in (0, 1)$, on définit la fonction

$$\omega_1(t) := \frac{\omega\left(\frac{t}{1-t}\right)}{1 + \omega\left(\frac{t}{1-t}\right)}.$$

On vérifie aisément que ω_1 est un homéomorphisme croissant de $(0,1)$.

Si $\tau \in (-\infty,-1)$, alors les points $\tau,-1,0,\infty$ sont dans l'ordre et on a

$$\frac{1}{-\tau'-1} = [\tau',-1,0,\infty] \geq 1/\omega(1/[\tau,-1,0,\infty]) = 1/\omega(-\tau-1).$$

On obtient donc

$$|\tau'| = -\tau' \leq 1+\omega(-\tau-1) = 1+\omega(|\tau|-1).$$

La fonction $\omega_2(t) := 1+\omega(t-1)$ est un homéomorphisme croissant de $(1,+\infty)$.

La fonction $\omega_3(t)$ qui vaut $\omega_1(t)$ sur $(0,1)$, 1 au point 1 et $\omega_2(t)$ sur $(1,+\infty)$ est par conséquent un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}^+$.

Finalement, la fonction $\eta(t) := \max\{\omega(t),\omega_3(t)\}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc un homéomorphisme. Par construction de η, on a $|\tau'| \leq \eta(|\tau|)$ peu importe à quel intervalle appartient τ de sorte que $f|_{\overline{\mathbb{R}}}$ est η-quasimöbius.

$\square$

3.2.3 Structure de groupe

Soit A un sous-ensemble non-vide de $\widehat{\mathbb{C}}$. Alors l'ensemble des homéomorphismes quasimöbius de A forme un groupe.

La fonction identité sur A est clairement Id-quasimöbius. Si φ et ψ sont respectivement η_1- et η_2-quasimöbius, alors un calcul direct montre que $\varphi \circ \psi$ est $\eta_1 \circ \eta_2$-quasimöbius.

Soit φ un homéomorphisme η-quasimöbius, τ le birapport en valeur absolue de quatre points et τ' le birapport en valeur absolue de leurs images par φ. On a vu à la remarque 3.5 que $\tau'^{-1} \leq \eta(\tau^{-1})$, donc on a $\eta^{-1}(\tau'^{-1}) \leq \tau^{-1}$ et alors

$$\tau \leq \frac{1}{\eta^{-1}(\frac{1}{\tau'})},$$

ce qui montre que φ^{-1} est quasimöbius. En effet, la fonction $t \mapsto (\eta^{-1}(t^{-1}))^{-1}$ est un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}^+$.

Enfin, il est clair que la propriété d'être η-quasimöbius ou non est invariante par composition à gauche et à droite par transformations de Möbius, puisque ces dernières préservent le birapport. D'ailleurs, il est intéressant de noter que les seuls plongements Id-quasimöbius sont les transformations de Möbius (Ase02, Proposition 1.3.2).

3.3 Extension de Beurling-Ahlfors

Un problème plus difficile que le théorème 3.6 est sa réciproque. Est-ce que tout homéomorphisme quasimöbius de $\overline{\mathbb{R}}$ est la restriction d'un automorphisme quasiconforme du demi-plan supérieur ? La réponse est affirmative. On a en fait un résultat formellement plus fort. Débutons par une définition, qu'on reliera plus tard à la notion de plongement quasimöbius.

Définition 3.7. Soit $\rho \geq 1$. Un homéomorphisme croissant $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *ρ-faiblement-quasisymétrique* si

$$\frac{1}{\rho} \leq \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{\varphi(x) - \varphi(x-t)} \leq \rho$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$. On dira que φ est *faiblement-quasisymétrique* ou est une *quasisymétrie faible* s'il existe un ρ tel que φ soit ρ-faiblement-quasisymétrique.

Géométriquement, une quasisymétrie faible envoie toute paire d'intervalles adjacents de même longueur sur des intervalles dont le rapport des longueurs est uniformément borné, d'où son nom. L'appellation *quasisymétrie* est due à Kelingos (Kel66). On a ajouté l'adjectif *faible* pour différencier cette notion de celle plus contemporaine des plongements quasisymétriques qu'on introduira plus tard.

L'énoncé du théorème de Beurling et Ahlfors se lit comme suit.

Théorème 3.8 (Beurling-Ahlfors)**.** *Étant donné $\rho \geq 1$, il existe un $K \geq 1$ tel que toute ρ-quasisymétrie faible se prolonge en un difféomorphisme K-quasiconforme du demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ sur lui-même.*

La démonstration du théorème, reproduite à partir de (LV73, p.83-85) et (BA56), est constructive et utilise la transformée de Beurling-Ahlfors qu'on définit maintenant.

Définition 3.9. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On définit l'*extension de Beurling-Ahlfors* de φ à $\mathbb{C}$ par

$$f_\varphi = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + i\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(1+i)(\alpha - i\beta),$$

où

$$\alpha(x+iy) = \int_0^1 \varphi(x+ty)\, dt, \qquad \beta(x+iy) = \int_0^1 \varphi(x-ty)\, dt.$$

Remarque 3.10. La transformée de Beurling-Ahlfors définit une fonction symétrique par rapport à l'axe réel, c'est-à-dire $f_\varphi(\bar{z}) = \overline{f_\varphi(z)}$, car $\alpha(\bar{z}) = \beta(z)$.

Remarque 3.11. La continuité de φ entraîne celle de f_φ.

Démonstration du théoreme de Beurling-Ahlfors. Soit φ une ρ-quasisymétrie faible et $f = f_\varphi$ sa transformée de Beurling-Ahlfors. On divisera la preuve en les étapes que voici :

1. $f|_\mathbb{R} = \varphi$;
2. $f(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$;
3. f est injective ;
4. $f \in C^1(\mathbb{H})$;
5. Le Jacobien $J_f = (\alpha_y\beta_x - \alpha_x\beta_y)/2$ est positif dans $\mathbb{H}$;
6. $f^{-1} \in C^1(f(\mathbb{H}))$;
7. Le quotient de dilatation de f satisfait $D_f \leq 8\rho(\rho+1)^2$;
8. $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, donc $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$;
9. $f|_\mathbb{H}$ est un difféomorphisme $8\rho(\rho+1)^2$-quasiconforme de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{H}$ tel que $f|_\mathbb{R} = \varphi$.

1. Pour tout x réel, on a $\alpha(x) = \beta(x) = \int_0^1 \varphi(x)\,dt = \varphi(x)$, donc
$$f(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(x)) + i\frac{1}{2}(\varphi(x) - \varphi(x)) = \varphi(x).$$
2. Pour $z = x + iy \in \mathbb{H}$, on a
$$\Im\mathrm{m}\, f(z) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\varphi(x+ty) - \varphi(x-ty))\ dt > 0$$
puisque φ est strictement croissante, donc $f(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$.
3. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $f(z_1) = f(z_2)$. En multipliant cette égalité par $\frac{2}{i+1}$ et en prenant la partie réelle et la partie imaginaire séparément, on voit que $\alpha(z_1) = \alpha(z_2)$ et $\beta(z_1) = \beta(z_2)$. On a donc
$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (\varphi(x_1+ty_1) - \varphi(x_2+ty_2))\,dt \\ 0 &= \int_0^1 (\varphi(x_1-ty_1) - \varphi(x_2-ty_2))\,dt. \end{aligned}$$
Par le théorème de la moyenne, il existe r et s dans $(0,1)$ tels que
$$\begin{aligned} \varphi(x_1+ry_1) &= \varphi(x_2+ry_2) \\ \varphi(x_1-sy_1) &= \varphi(x_2-sy_2), \end{aligned}$$

ce qui se traduit par

$$x_1 + ry_1 = x_2 + ry_2$$
$$x_1 - sy_1 = x_2 - sy_2,$$

étant donné que φ est injective. La positivité de r et s réduit le dernier système d'équations à $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, donc $z_1 = z_2$ et f est injective.

4. Un simple changement de variables donne, pour $y \neq 0$, $\alpha(z) = \frac{1}{y}\int_x^{x+y} \varphi(s)\,ds$ et $\beta(z) = \frac{1}{y}\int_{x-y}^{x} \varphi(s)\,ds$. Par le théorème fondamental du calcul, on trouve que

$$\alpha_x(z) = \frac{1}{y}(\varphi(x+y) - \varphi(x)) \qquad \alpha_y(z) = \frac{1}{y}(\varphi(x+y) - \alpha(z))$$
$$\beta_x(z) = \frac{1}{y}(\varphi(x) - \varphi(x-y)) \qquad \beta_y(z) = \frac{1}{y}(\varphi(x-y) - \beta(z)),$$

ce qui montre que $f \in C^1(\mathbb{H})$, ces dernières dérivées partielles étant continues.

5. Pour $z \in \mathbb{H}$, puisque $y > 0$ et que φ est strictement croissante, on a $\alpha_x > 0$ et $\beta_x > 0$. Aussi,

$$\alpha_y(z) = \frac{1}{y}(\varphi(x+y) - \alpha(z)) = \frac{1}{y}\int_0^1 (\varphi(x+y) - \varphi(x+ty))\,dt > 0,$$
$$\beta_y(z) = \frac{1}{y}(\varphi(x-y) - \beta(z)) = -\frac{1}{y}\int_0^1 (\varphi(x-ty) - \varphi(x-y))\,dt < 0.$$

Le Jacobien

$$J_f = \det[Df] = \det\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\alpha_y\beta_x - \alpha_x\beta_y)$$

est donc positif.

6. Par l'étape 3, f^{-1} est bien définie sur $f(\mathbb{H})$. Par le théorème d'inversion locale, on a que $f^{-1} \in C^1(f(\mathbb{H}))$, puisque $f \in C^1(\mathbb{H})$ et que $J_f > 0$ dans $\mathbb{H}$. Ainsi, la restriction de f à $\mathbb{H}$ est un difféomorphisme. On montrera alors que le quotient de dilatation de f est borné par une constante dépendant uniquement de ρ.

7. Puisque $f = \frac{1}{2}(1+i)(\alpha - i\beta)$ se décompose en la fonction $g = \alpha - i\beta$ suivie d'une transformation conforme constituée d'une rotation d'angle $\pi/4$ et d'une homothétie de facteur $\sqrt{2}/2$, le quotient de dilatation de f égale celui de g.

   On a

$$D_f(z) = D_g(z) \leq D_g(z) + \frac{1}{D_g(z)} = \frac{\max_\theta |\partial_\theta g(z)|^2 + \min_\theta |\partial_\theta g(z)|^2}{\max_\theta |\partial_\theta g(z)| \min_\theta |\partial_\theta g(z)|}$$

   Maintenant, rappelons que la matrice $[Dg(z)]$ possède une décomposition en valeurs singulières $U\Sigma V$ où U et V sont des matrices de rotation et Σ est diagonale d'entrées $\max_\theta |\partial_\theta g(z)|$ et $\min_\theta |\partial_\theta g(z)|$ (voir section 2.3.1). Cela implique que

$$\max_\theta |\partial_\theta g(z)| \min_\theta |\partial_\theta g(z)| = \det\Sigma = \det[Dg(z)] = \alpha_y\beta_x - \alpha_x\beta_y.$$

Aussi, puisque U et V sont des matrices orthogonales, on a

$$\begin{aligned}\max_\theta |\partial_\theta g(z)|^2 + \min_\theta |\partial_\theta g(z)|^2 &= \operatorname{tr} \Sigma^t\Sigma = \operatorname{tr} VV^t\Sigma^t U^t U\Sigma \\ &= \operatorname{tr} V^t\Sigma^t U^t U\Sigma V = \operatorname{tr}[Dg(z)]^t[Dg(z)] \\ &= \alpha_x^2 + \beta_x^2 + \alpha_y^2 + \beta_y^2.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}D_f \le D_g + \frac{1}{D_g} &= \frac{\operatorname{tr}[Dg]^t[Dg]}{\det[Dg]} = \frac{\alpha_x^2 + \beta_x^2 + \alpha_y^2 + \beta_y^2}{\alpha_y\beta_x - \alpha_x\beta_y} \\ &= \frac{\alpha_x\beta_x}{-\alpha_y\beta_y}\frac{\alpha_x/\beta_x + \beta_x/\alpha_x + \alpha_y^2/(\alpha_x\beta_x) + \beta_y^2/(\alpha_x\beta_x)}{-\beta_x/\beta_y + \alpha_x/\alpha_y}.\end{aligned}$$

Remarquons que $\alpha(z) = \int_0^1 \varphi(x+ty)\,dt > \varphi(x)$ et $\beta(z) = \int_0^1 \varphi(x-ty)\,dt < \varphi(x)$, donc $\alpha_x > \alpha_y$ et $\beta_x > -\beta_y$ par les calculs de l'étape 4. Ceci donne

$$-\beta_x/\beta_y + \alpha_x/\alpha_y > 2, \quad \alpha_y^2/(\alpha_x\beta_x) < \alpha_x/\beta_x, \quad \beta_y^2/(\alpha_x\beta_x) < \beta_x/\alpha_x$$

et alors

$$D_f \le \frac{\alpha_x\beta_x}{-\alpha_y\beta_y}(\alpha_x/\beta_x + \beta_x/\alpha_x).$$

Notons qu'on n'a toujours pas utilisé l'hypothèse que φ est une ρ-quasisymétrie faible. C'est ce qu'on fera maintenant. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, on a

$$\frac{1}{\rho}(\varphi(s) - \varphi(s-t)) \le \varphi(s+t) - \varphi(s) \le \rho(\varphi(s) - \varphi(s-t)).$$

En prenant $s = x$ et $t = y$, on obtient immédiatement que $\alpha_x/\beta_x \in [1/\rho, \rho]$, ou encore que $\alpha_x/\beta_x + \beta_x/\alpha_x \le 2\rho$.

En remplaçant s par $x + \frac{1}{2}y$ et t par $\frac{1}{2}y$ dans l'inégalité de gauche, on obtient

$$\varphi(x + \frac{1}{2}y) - \varphi(x) \le \rho(\varphi(x+y) - \varphi(x + \frac{1}{2}y)),$$

puis, en additionnant $\varphi(x+y) - \varphi(x+\frac{1}{2}y)$ des deux côtés de cette dernière inégalité, on arrive à

$$\varphi(x+y) - \varphi(x) \le (\rho+1)(\varphi(x+y) - \varphi(x + \frac{1}{2}y)). \tag{3.1}$$

On a

$$\begin{aligned}\alpha_y(z) &= \frac{1}{y}\int_0^1 (\varphi(x+y) - \varphi(x+ty))\,dt \ge \frac{1}{y}\int_0^{1/2} (\varphi(x+y) - \varphi(x+ty))\,dt \\ &\ge \frac{1}{y}\int_0^{1/2} (\varphi(x+y) - \varphi(x + \frac{1}{2}y))\,dt = \frac{1}{2y}(\varphi(x+y) - \varphi(x + \frac{1}{2}y)), \end{aligned} \tag{3.2}$$

puisque le premier intégrand est positif et décroissant en t. En combinant les deux inégalités (3.1) et (3.2), on arrive à

$$\alpha_y \geq \frac{\alpha_x}{2(\rho+1)}.$$

De la même manière, on trouve que $-\beta_y \geq \frac{\beta_x}{2(\rho+1)}$, donc

$$\frac{\alpha_x\beta_x}{-\alpha_y\beta_y} \leq 4(\rho+1)^2$$

et finalement,

$$D_f \leq \frac{\alpha_x\beta_x}{-\alpha_y\beta_y}(\alpha_x/\beta_x + \beta_x/\alpha_x) \leq 4(\rho+1)^2 \cdot 2\rho = 8\rho(\rho+1)^2.$$

8. Ainsi, f est K-quasiconforme sur $\mathbb{H}$ avec $K = 8\rho(\rho+1)^2$. Par symétrie, f est aussi K-quasiconforme dans $\mathbb{H}^* = \{z : \bar{z} \in \mathbb{H}\}$ et par le lemme 3.2, f est K-quasiconforme sur $\mathbb{C}$. Or, on a vu comme corollaire au principe de factorisation 2.37 que l'image quasiconforme de la sphère privée d'un point est toujours la sphère privée d'un point (corollaire 2.38). Par conséquent, $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Puisque $f(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$, $f(\mathbb{H}^*) \subset \mathbb{H}^*$ et $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, on a forcément l'égalité $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.
9. En vertu de toutes les étapes qui précèdent, la démonstration est terminée.

$\square$

Remarque 3.12. Tel que mentionné à l'étape 8 de la démonstration, la transformée de Beurling-Ahlfors f_φ d'une quasisymétrie faible φ est en fait quasiconforme dans tout le plan, mais en général difféomorphe que dans le plan privé de la droite réelle. Une légère modification de la construction de Beurling et Ahlfors permet d'obtenir une extension de φ analytique au sens réel sur $\mathbb{H}$ (Leh87, p. 36).

Remarque 3.13. L'estimé $K = 8\rho(\rho+1)^2$ est plutôt grossier. On peut montrer que f_φ est 8ρ-quasiconforme (LV73, p. 85). De plus, en multipliant la partie imaginaire de f_φ par une constante appropriée, Beurling et Ahlfors ont montré qu'il existe une extension g_φ de φ qui est ρ^2-quasiconforme (BA56). En particulier, si φ est 1-faiblement-quasisymétrique, alors φ a une extension 1-quasiconforme (donc conforme) à $\mathbb{H}$, et alors φ est une transformation de Möbius qui fixe l'infini, donc une application affine de la forme $x \mapsto ax + b$. Ce dernier résultat se démontre également de façon directe à partir de la définition.

3.4 Plongements quasisymétriques

Avant de faire le lien entre les plongements quasimöbius et les quasisymétries faibles, on introduit une troisième classe de fonctions (AIM09, Chapitre 3) (Ase02).

Définition 3.14. Soit $\eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ un homéomorphisme croissant. Soit $A \subset \mathbb{C}$ et $\varphi : A \to \mathbb{C}$ un plongement. Si

$$\frac{|\varphi(c) - \varphi(b)|}{|\varphi(b) - \varphi(a)|} \leq \eta\left(\frac{|c-b|}{|b-a|}\right)$$

pour tout triplet de points distincts $a, b, c \in A$, alors on dira que φ est η*-quasisymétrique*. Une *quasisymétrie* est un plongement η*-quasisymétrique* pour une certaine fonction de distorsion η.

Remarque 3.15. En échangeant les rôles de a et c, on voit qu'un plongement η-quasisymétrique satisfait automatiquement l'inégalité inférieure

$$\frac{|\varphi(c) - \varphi(b)|}{|\varphi(b) - \varphi(a)|} \geq \left(\eta\left(\frac{|b-a|}{|c-b|}\right)\right)^{-1}.$$

Les homéomorphismes quasisymétriques d'un ensemble $A \subset \mathbb{C}$ forment clairement un groupe. De plus, il n'est pas difficile de vérifier que les applications Id-quasisymétriques sont les similitudes.

Remarque 3.16. En remplaçant les distances euclidiennes $|x - y|$ par une distance arbitraire $d(x, y)$, on obtient une définition de plongement quasisymétrique entre espaces métriques quelconques. Cette notion est de plus en plus étudiée en analyse sur des espaces métriques, en relation avec les applications quasiconformes et les plongements quasimöbius (Ase02).

Le lien très fort qui existe entre les différentes classes de fonctions qu'on a introduites jusqu'à maintenant est en partie exprimé dans le théorème qui suit.

Théorème 3.17. *Soient C_1 et C_2 des cercles de la sphère de Riemann et $\varphi : C_1 \to C_2$ un homéomorphisme. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) φ est la restriction à C_1 d'un automorphisme quasiconforme de $\widehat{\mathbb{C}}$ qui envoie C_1 sur C_2.

(2) φ est quasimöbius.

(3) φ est un homéomorphisme quasisymétrique de la droite réelle composé à gauche et à droite par des transformations de Möbius.

(4) φ est une quasisymétrie faible composée à gauche et à droite par des transformations de Möbius.

Démonstration. Quitte à composer φ par des transformations de Möbius appropriées à gauche et à droite, on peut supposer que $C_1 = C_2 = \overline{\mathbb{R}}$, que $\varphi(\infty) = \infty$ et que φ est croissante sur $\mathbb{R}$.

(1) ⇒ (2) **:** Si φ est la restriction à $\overline{\mathbb{R}}$ d'un automorphisme quasiconforme de $\widehat{\mathbb{C}}$ qui fixe $\overline{\mathbb{R}}$ comme ensemble, alors en particulier φ est la restriction au bord d'un automorphisme quasiconforme de $\mathbb{H}$ et on a vu au théorème 3.6 que φ est alors quasimöbius.

(2) ⇒ (3) **:** Supposons que φ soit quasimöbius sur $\overline{\mathbb{R}}$, fixe le point à l'infini et soit croissante sur $\mathbb{R}$. Par hypothèse, on sait qu'il existe un homéomorphisme croissant η de $\mathbb{R}^+$ tel que

$$|[\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c), \varphi(d)]| \leq \eta(|[a, b, c, d]|).$$

En choisissant $d = \infty$, on a aussi $\varphi(d) = \infty$ et

$$\frac{|\varphi(c) - \varphi(b)|}{|\varphi(b) - \varphi(a)|} = |[\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c), \infty]| \leq \eta(|[a, b, c, \infty]|) = \eta\left(\frac{|c-b|}{|b-a|}\right).$$

Ceci montre que φ est η-quasisymétrique.

(3) ⇒ (4) **:** Supposons que φ est η-quasisymétrique. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$. Si on prend les points $a = x - t$, $b = x$ et $c = x + t$, alors on obtient

$$\frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{\varphi(x) - \varphi(x-t)} \leq \eta\left(\frac{(x+t) - x}{x - (x-t)}\right) = \eta(1).$$

Par la remarque 3.15 qui suivait la définition des plongements quasisymétriques, on a également la borne inférieure

$$\frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{\varphi(x) - \varphi(x-t)} \geq \left(\eta\left(\frac{x - (x-t)}{(x+t) - x}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{\eta(1)}.$$

Ainsi, φ est $\eta(1)$-faiblement-quasisymétrique.

(4) ⇒ (1) **:** Si φ est faiblement quasisymétrique, alors le théorème 3.8 de Beurling et Ahlfors nous dit qu'il existe une extension quasiconforme de φ à $\widehat{\mathbb{C}}$, ce qui revient à dire que φ est la restriction à $\mathbb{R}$ d'un automorphisme quasiconforme de la sphère. □

Il est faux en général qu'un plongement quasimöbius est quasisymétrique, à moins qu'il envoie l'infini sur lui-même. Cependant, un plongement quasisymétrique est toujours quasimöbius (Pom92, Proposition 5.14, p.110) (Ase02, Proposition 1.3.3).

L'avantage des plongements quasimöbius est leur invariance par composition avec des transformations de Möbius. Par contre, la condition d'être ρ-faiblement-quasisymétrique est beaucoup plus facile à vérifier. Par exemple, un homéomorphisme croissant

φ de la droite réelle qui est bilipschitzien de constante $c \geq 1$, c'est-à-dire qui satisfait

$$\frac{1}{c}|x-y| \leq |f(x)-f(y)| \leq c|x-y|$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, est clairement c^2-faiblement-quasisymétrique. Parmi ces homéomorphismes bilipschitziens, on trouve notamment les fonctions φ continûment dérivables dont la dérivée satisfait $1/c \leq \varphi' \leq c$.

Bien que les quasisymétries soient les analogues des applications quasiconformes en dimension 1, elles ne jouissent pas des mêmes propriétés de régularité. Pendant longtemps, on a cru que la restriction au bord d'un homéomorphisme quasiconforme du demi-plan supérieur fixant le point à l'infini était nécessairement absolument continue, mais il n'en est rien. En fait, pour chaque $\rho > 1$, il existe une fonction ρ-faiblement-quasisymétrique φ singulière, c'est-à-dire telle que φ' s'annulle presque partout (BA56) (Leh87, p.36).

3.5 Quasicercles

Par le théorème de Jordan-Schoenflies, une courbe de Jordan peut être définie comme l'image d'un cercle par un homéomorphisme de la sphère $\widehat{\mathbb{C}}$ (Pom92, p.25). Si l'homéomorphisme est conforme, c'est une transformation de Möbius et la courbe est un cercle sur $\widehat{\mathbb{C}}$. Entre une courbe de Jordan générale et un cercle euclidien s'insère toute une hiérarchie de courbes, qu'on appelle quasicercles.

Définition 3.18. On dit qu'un domaine $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ est un K-*quasidisque* s'il est l'image d'un disque par un automorphisme K-quasiconforme de la sphère $\widehat{\mathbb{C}}$. Un K-*quasicercle* est la frontière d'un K-quasidisque, c'est-à-dire l'image d'un cercle par un automorphisme K-quasiconforme de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Le concept de quasicercle est omniprésent en analyse. Les quasicercles apparaissent dans des contextes très variés et possèdent de nombreuses caractérisations. Frederick Gehring n'en énumère pas moins de vingt-six dans l'article (Geh99), mettant à jour la précédente liste de dix-sept caractérisations équivalentes dans sa monographie (Geh82). Notamment, plusieurs caractérisations sont purement métriques ou géométriques et donc plus faciles à manipuler que notre définition.

Une courbe C^1 par morceaux est un quasicercle si et seulement si elle n'a pas de pointes ("cusps" en anglais) (LV73, p.104). Aussi, il est connu que l'ensemble de Julia du polynôme quadratique $f(z) = z^2 + c$ est un quasicercle si c se trouve à l'intérieur de la cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot (FM89).

Un quasicercle a toujours une aire nulle, puisque les applications quasiconformes préservent les ensembles d'aire nulle. Cependant, un quasicercle n'est pas toujours localement rectifiable. Le flocon de von Koch en est un bon exemple (GM05, p.235). Un quasicercle peut même avoir une dimension de Hausdorff arbitrairement proche de 2 (Geh82, p.26).

Nous présenterons ici la caractérisation la plus simple des quasicercles en termes de réflexions quasiconformes (Ahl06).

Définition 3.19. Soit Γ une courbe de Jordan de domaines complémentaires Ω et Ω^*. Une involution K-quasiconforme de $\widehat{\mathbb{C}}$ qui renverse l'orientation, fixe Γ point par point et envoie Ω sur Ω^* est appelée *réflexion K-quasiconforme.*

Théorème 3.20. *Une courbe de Jordan admet une réflexion quasiconforme si et seulement si c'est un quasicercle.*

Démonstration. Soit Γ un K-quasicercle. Par hypothèse, il existe un automorphisme K-quasiconforme f de $\widehat{\mathbb{C}}$ tel que $f(\overline{\mathbb{R}}) = \Gamma$. L'application $f \circ r \circ f^{-1}$, où r est la conjugaison complexe (réflexion par rapport à $\overline{\mathbb{R}}$), est une involution K^2-quasiconforme renversant l'orientation, fixant tout point de Γ et envoyant Ω sur Ω^*. C'est donc une réflexion quasiconforme par rapport à Γ.

Réciproquement, supposons que la courbe Γ de domaines complémentaires Ω et Ω^* admette une réflexion K-quasiconforme g. Soit h une transformation conforme de $\mathbb{H}$ dans Ω. On a que h se prolonge de façon homéomorphe à $\overline{\mathbb{R}}$ par le théorème de Carathéodory-Osgood. On peut aussi définir h pour z dans le demi-plan inférieur $\mathbb{H}^*$ par $h(z) := g(h(\bar{z}))$. La fonction ainsi prolongée est un homéomorphisme qui est K-quasiconforme sur $\mathbb{H} \cup \mathbb{H}^*$ et donc K-quasiconforme sur $\widehat{\mathbb{C}}$ par la proposition 3.3. Ainsi, Γ est l'image K-quasiconforme de $\overline{\mathbb{R}}$, donc un K-quasicercle. □

Il est bon de mentionner une description purement géométrique des quasicercles due à Ahlfors (Ahl63) (GL00, p.307). Si Γ est une courbe de Jordan, alors Γ est un quasicercle si et seulement s'il existe une constante $\lambda > 1$ telle que pour toute paire de points $z, w \in \Gamma$, le diamètre sphérique de la plus petite composante de $\Gamma \setminus \{z, w\}$ est majoré par $\lambda \cdot s(z, w)$, où s désigne la distance sphérique.

En termes simples, cette condition limite qu'un quasicercle puisse passer par un point z, s'en éloigner beaucoup (dans les deux directions), puis revenir très près de z.

Chapitre 4

Soudure conforme

4.1 Souder des surfaces de Riemann

Soit deux surfaces de Riemann à bord S_1 et S_2. Si γ_1 et γ_2 sont des arcs au bord de S_1 et S_2 respectivement et si $\varphi : \gamma_1 \to \gamma_2$ est un homéomorphisme renversant l'orientation, alors on peut souder S_1 et S_2 via φ pour former la nouvelle surface $S := (S_1 \sqcup S_2)/\varphi$, où $S_1 \sqcup S_2$ est l'union disjointe de S_1 et de S_2. Si S peut être munie d'une structure conforme (un atlas $\mathbb{C}$-analytique) telle que sa restriction à S_1 et S_2 donne les mêmes structures initialement portées par ces surfaces, alors on dit que φ admet une *soudure conforme*. Ceci est en fait équivalent à ce qu'il existe une surface de Riemann R, deux ouverts disjoints $R_1, R_2 \subset R$, une courbe simple Γ (fermée ou non) tels que $R = R_1 \cup R_2 \cup \Gamma$ et des transformations conformes de S_j sur $R_j \cup \Gamma$ ($j = 1, 2$) qui envoient chaque paire de points identifiés par φ sur un même point dans Γ.

Une des premières apparitions de la soudure conforme dans la littérature est attribuée à R. Courant qui a énoncé et démontré en 1936 un théorème de soudure conforme pour des arcs et un homéomorphisme analytiques, ceci en lien avec le problème de surfaces minimales de Plateau-Douglas (Cou36a) (Cou36b). Pour un bref historique du sujet de la soudure conforme, voir (Ham02).

Le cas qui nous intéressera ici est celui où S_1 et S_2 sont des disques et $\gamma_j = \partial S_j$. Dans ce cas, la surface $S = (S_1 \sqcup S_2)/\varphi$ est topologiquement équivalente à une sphère. Si φ admet une soudure conforme, alors S est conformément équivalente à la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ par le théorème d'uniformisation. Ainsi, φ admet une soudure conforme si et seulement s'il existe une courbe de Jordan $\Gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}$ et des transformations conformes de S_1, S_2 dans les domaines complémentaires de Γ qui réalisent l'identification $z \sim \varphi(z)$.

La question principale à étudier est : quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un homéomorphisme φ admette une soudure conforme ? En apparence simple, ce problème ne possède pas de solution complète à ce jour. Grâce à la théorie des applications quasiconformes et aux résultats du chapitre 3, on parvient à une réponse partielle intéressante.

4.2 Propriétés élémentaires de la soudure conforme

On peut reformuler la notion de soudure conforme plus simplement en renversant le point de vue.

Soit $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ un domaine de Jordan, $\Omega^* := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$ et $f : \mathbb{H} \to \Omega$, $g : \mathbb{H}^* \to \Omega^*$ des transformations conformes, où $\mathbb{H}^* := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{H}}$ est le demi-plan inférieur. Le théorème de Carathéodory assure que f et g se prolongent à $\overline{\mathbb{R}}$ et que $\varphi := f^{-1} \circ g : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ est un homéomorphisme. On dira que φ est une *fonction soudante* pour Ω ou encore que φ *soude* Ω *conformément*, ce qu'on notera par $\varphi \in \mathrm{SC}(\Omega)$. Certains auteurs préfèrent utiliser des transformations conformes de $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}^* := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ dans Ω et Ω^* pour obtenir un homéomorphisme du cercle unité. On peut passer d'une convention à l'autre par la transformation de Cayley $z \mapsto (z-i)/(z+i)$.

À première vue, il peut sembler que $\mathrm{SC}(\Omega)$ ne dépend en réalité que de la courbe de Jordan $\partial\Omega$ et pas du choix d'un des domaines complémentaires. Cependant, une différence formelle survient si on échange les rôles de Ω et Ω^*. En effet, si $f : \mathbb{H} \to \Omega$ et $g : \mathbb{H}^* \to \Omega^*$ sont des transformations conformes, alors $\tilde{g} : \mathbb{H} \to \Omega^*$ et $\tilde{f} : \mathbb{H}^* \to \Omega$ définies par $\tilde{g}(z) = g(-z)$ et $\tilde{f}(z) = f(-z)$ sont conformes et satisfont

$$\tilde{g}^{-1} \circ \tilde{f}(x) = -g^{-1} \circ f(-x) = -\varphi^{-1}(-x).$$

En appliquant ce raisonnement une seconde fois, on arrive à la conclusion que $\varphi \in \mathrm{SC}(\Omega)$ si et seulement si $x \mapsto -\varphi^{-1}(-x) \in \mathrm{SC}(\Omega^*)$.

De la même manière, l'ordre entre f et g a de l'importance. Si r désigne la conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$, alors $\hat{g} := r \circ g \circ r : \mathbb{H} \to r(\Omega^*)$ et $\hat{f} := r \circ f \circ r : \mathbb{H}^* \to r(\Omega)$ sont conformes et satisfont $\hat{g}^{-1} \circ \hat{f}(x) = r \circ g^{-1} \circ f \circ r(x) = g^{-1} \circ f(x) = \varphi^{-1}(x)$ pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Ainsi, $\varphi \in \mathrm{SC}(\Omega)$ si et seulement si $\varphi^{-1} \in \mathrm{SC}(r(\Omega^*))$.

Le problème principal de la soudure conforme est de caractériser les homéomorphismes φ de $\overline{\mathbb{R}}$ qui admettent une soudure conforme, c'est-à-dire qui possèdent une représentation $\varphi = f^{-1} \circ g$ pour un certain domaine de Jordan Ω. On vient de montrer que φ admet une soudure conforme si et seulement si φ^{-1} et $x \mapsto -\varphi^{-1}(-x)$ en admettent une. Ce problème possède également une invariance par transformations de Möbius. En effet, si $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ et $G \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}^*)$, alors $f \circ F$ et $g \circ G$ sont des transformations conformes de $\mathbb{H}, \mathbb{H}^*$ dans Ω, Ω^* qui donnent l'homéomorphisme $(f \circ F)^{-1} \circ (g \circ G) = F^{-1} \circ \varphi \circ G$. De plus, toutes les transformations conformes de $\mathbb{H}, \mathbb{H}^*$ dans Ω, Ω^* peuvent être obtenues de cette façon, puisque si $h : \mathbb{H} \to \Omega$ est une transformation conforme, alors $f^{-1} \circ h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ et similairement pour $\mathbb{H}^*$. Ainsi, si $\varphi \in \mathrm{SC}(\Omega)$, alors

$$\mathrm{SC}(\Omega) = \{F^{-1}|_{\overline{\mathbb{R}}} \circ \varphi \circ G|_{\overline{\mathbb{R}}} : F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}), G \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}^*)\}.$$

Remarquons que la restriction à $\overline{\mathbb{R}}$ de chaque élément de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ ou $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}^*)$ correspond à un élément du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ vu comme agissant sur $\overline{\mathbb{R}}$ par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Pour future référence, nous adopterons la notation suivante.

Notation 4.1. Soit φ un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{R}}$. L'ensemble des différents homéomorphismes $S \circ \varphi \circ T$ obtenus lorsque S et T parcourent $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sera dénoté

$$[\varphi] := \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \circ \varphi \circ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$$

et appellé *double orbite* de φ sous $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Ainsi, les précédentes observations se résument à $\mathrm{SC}(\Omega) = [\varphi]$ pour tout $\varphi \in \mathrm{SC}(\Omega)$. Par conséquent, $\mathrm{SC}(\Omega) \cap \mathrm{SC}(\widetilde{\Omega}) \neq \varnothing$ si et seulement si $\mathrm{SC}(\Omega) = \mathrm{SC}(\widetilde{\Omega})$. Aussi, un homéomorphisme quelconque φ de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une soudure conforme si et seulement si tous les représentants de la double orbite $[\varphi]$ admettent une soudure conforme.

Une normalisation possible, afin d'enlever l'ambiguité due à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, est de marquer trois points z_1, z_2, z_3 sur $\partial\Omega$ orientés positivement par rapport à Ω et d'exiger que f et g envoient $-1, 0, \infty$ sur ces trois points respectivement. Cependant, il n'y a pas de façon naturelle de choisir les trois points à marquer.

Une question également importante est de savoir comment retrouver le domaine Ω à partir d'un homéomorphisme φ si ce dernier admet une soudure conforme. À cet effet, remarquons que si T est une transformation de Möbius, alors $\mathrm{SC}(T(\Omega)) = \mathrm{SC}(\Omega)$. En effet, si f et g sont des transformations conformes de $\mathbb{H}, \mathbb{H}^*$ dans Ω, Ω^* telles que $f^{-1} \circ g = \varphi$ sur $\overline{\mathbb{R}}$, alors $T \circ f$ et $T \circ g$ sont des transformations conformes de $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}^*$ dans $T(\Omega), T(\Omega^*)$, donc $(T \circ f)^{-1} \circ (T \circ g) = f^{-1} \circ g = \varphi$ appartient à $\mathrm{SC}(T(\Omega))$. Cela implique que $\mathrm{SC}(T(\Omega)) = [\varphi] = \mathrm{SC}(\Omega)$.

Notation 4.2. On notera la classe d'équivalence d'un domaine de Jordan Ω modulo les transformations de Möbius par

$$[\Omega] := \{T(\Omega) : T \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})\}.$$

Puisque $\mathrm{SC}(T(\Omega)) = \mathrm{SC}(\Omega)$ pour toute transformation de Möbius T, l'application $[\Omega] \mapsto \mathrm{SC}(\Omega)$ est bien définie. Cette application va de l'ensemble des classes de domaines de Jordan, noté

$$J := \{[\Omega] : \Omega \text{ est un domaine de Jordan dans } \widehat{\mathbb{C}}\},$$

vers l'ensemble des doubles orbites d'homéomorphismes de $\overline{\mathbb{R}}$ par rapport au groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, qu'on notera

$$\Sigma := \{[\varphi] : \varphi \text{ est un homéomorphisme de } \overline{\mathbb{R}}\}.$$

Avec cette formulation, on peut énoncer en d'autres termes les deux problèmes principaux qui nous intéressent. Le premier demande quelle est l'image de l'application $[\Omega] \mapsto \mathrm{SC}(\Omega)$. On verra que ce ne sont pas tous les homéomorphismes de $\overline{\mathbb{R}}$ qui admettent une soudure conforme et donc l'application $[\Omega] \mapsto \mathrm{SC}(\Omega)$ n'est pas surjective dans Σ. Le deuxième problème revient à trouver la préimage d'un élément $[\varphi]$ par l'application $[\Omega] \mapsto \mathrm{SC}(\Omega)$. On a le résultat préliminaire suivant.

Lemme 4.3. *Soit Ω et $\widetilde{\Omega}$ des domaines de Jordan. Alors $\mathrm{SC}(\Omega) = \mathrm{SC}(\widetilde{\Omega})$ si et seulement s'il existe un homéomorphisme h de $\widehat{\mathbb{C}}$ conforme sur Ω et Ω^* tel que $h(\Omega) = \widetilde{\Omega}$.*

Démonstration. Supposons que $\mathrm{SC}(\Omega) = \mathrm{SC}(\widetilde{\Omega})$. Cela veut dire qu'il existe des transformations conformes $f : \mathbb{H} \to \Omega$, $g : \mathbb{H}^* \to \Omega^*$, $\tilde{f} : \mathbb{H} \to \widetilde{\Omega}$ et $\tilde{g} : \mathbb{H}^* \to \widetilde{\Omega}^*$ telles que $f^{-1} \circ g = \tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$. Il en découle que $\tilde{f} \circ f^{-1} = \tilde{g} \circ g^{-1}$ sur $\partial\Omega$, de sorte que la fonction

$$h(z) := \begin{cases} \tilde{f} \circ f^{-1}(z) & \text{si} \quad z \in \overline{\Omega} \\ \tilde{g} \circ g^{-1}(z) & \text{si} \quad z \in \Omega^* \end{cases}$$

est un homéomorphisme de $\widehat{\mathbb{C}}$. De plus, $h|_{\Omega} = \tilde{f} \circ f^{-1} : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ est conforme tout comme $h|_{\Omega^*} = \tilde{g} \circ g^{-1} : \Omega^* \to \widetilde{\Omega}^*$ et on a $h(\Omega) = \tilde{f} \circ f^{-1}(\Omega) = \tilde{f}(\mathbb{H}) = \widetilde{\Omega}$.

Réciproquement, si $f : \mathbb{H} \to \Omega$ et $g : \mathbb{H}^* \to \Omega^*$ sont des transformations conformes et h est un homéomorphisme de la sphère conforme sur Ω et Ω^* tel que $h(\Omega) = \widetilde{\Omega}$, alors $h \circ f : \mathbb{H} \to \widetilde{\Omega}$ et $h \circ g : \mathbb{H}^* \to \widetilde{\Omega}^*$ sont des transformations conformes et on a $\mathrm{SC}(\Omega) = [f^{-1} \circ g] = [(h \circ f)^{-1} \circ (h \circ g)] = \mathrm{SC}(\widetilde{\Omega})$. $\square$

Pour un sous-ensemble fermé E de $\widehat{\mathbb{C}}$, on notera l'ensemble de tous les homéomorphismes de la sphère conformes sur $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ par $\mathrm{HC}(E)$. On a toujours $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \subset \mathrm{HC}(E)$. Si $\mathrm{HC}(E) = \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$, c'est-à-dire si chaque homéomorphisme de la sphère conforme hors de E est automatiquement conforme sur toute la sphère et est donc une transformation de Möbius, alors on dira que l'ensemble E est *conformément effaçable*. Par exemple, un ensemble fini de points est toujours conformément effaçable par le théorème des singularités enlevables de Riemann. Remarquons que si $h \in \mathrm{HC}(E)$, alors

$$\mathrm{HC}(E) = \{\tilde{h} \circ h : \tilde{h} \in \mathrm{HC}(h(E))\}.$$

En particulier, si E est conformément effaçable alors $T(E)$ est également conformément effaçable pour chaque transformation de Möbius T. Dans ce nouveau vocabulaire, le dernier lemme peut se réécrire sous la forme

$$\mathrm{SC}^{-1}(\mathrm{SC}(\Omega)) = \{h(\Omega) : h \in \mathrm{HC}(\partial\Omega)\}.$$

Le corollaire suivant est une conséquence directe de ce lemme.

Corollaire 4.4. *Soit Ω un domaine de Jordan. Si $\partial\Omega$ est conformément effaçable, alors $\mathrm{SC}^{-1}(\mathrm{SC}(\Omega)) = [\Omega]$.*

Par exemple, dans le cas trivial où on prend $\Omega = \mathbb{H}$, on peut choisir $f = g = \mathrm{Id}$, ce qui donne l'identité comme fonction soudante, donc $\mathrm{SC}(\mathbb{H}) = [\mathrm{Id}] = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Est-ce que ce sont seulement les images de $\mathbb{H}$ par des transformations de Möbius, c'est-à-dire les disques, qui admettent l'identité comme fonction soudante ? Pour le vérifier, il suffit de montrer que $\partial\mathbb{H} = \overline{\mathbb{R}}$ est conformément effaçable.

Lemme 4.5. *Un cercle est conformément effaçable.*

Démonstration. Comme on l'a déjà remarqué, la propriété d'être conformément effaçable est Möbius-invariante, de sorte qu'il suffit de montrer que $\overline{\mathbb{R}}$ est conformément effaçable. Or, le théorème de Morera et le théorème de Cauchy impliquent que tout homéomorphisme conforme de part et d'autre de la droite réelle est conforme partout (voir le lemme 3.2). □

Malheureusement, on ne connaît pas de caractérisation géométrique des courbes de Jordan qui sont conformément effaçables (AJKS09). Par conséquent, il n'existe pas à ce jour de critère simple sur l'homéomorphisme φ pour que $\mathrm{SC}^{-1}([\varphi])$ soit réduit à une seule classe. Quoi qu'il en soit, on verra que c'est le cas pour une large famille d'homéomorphismes de $\overline{\mathbb{R}}$, soit les homéomorphismes quasimöbius. Pour ceux-ci, il existe quelques algorithmes permettant d'obtenir approximativement le domaine de Jordan que φ soude conformément. À ce sujet, voir (Wil07), (SM04) et (MR07).

La plupart des résultats connus dans le domaine de la soudure conforme font appel à la théorie des applications quasiconformes. Ceci s'explique en partie par le lemme suivant, repris de Oikawa (Oik61, Lemma 1) qui l'attribue à C. Blanc et L. Volkovyskiï. On dira qu'un homéomorphisme φ de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une *soudure quasiconforme* s'il existe un domaine de Jordan Ω de complément $\Omega^* := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$ et des applications quasiconformes $f : \mathbb{H} \to \Omega$, $g : \mathbb{H}^* \to \Omega^*$ telles que $f^{-1} \circ g = \varphi$.

Lemme 4.6. *Un homéomorphisme admet une soudure conforme si et seulement s'il admet une soudure quasiconforme.*

Démonstration. Puisqu'une application conforme est aussi quasiconforme, l'implication directe est triviale. Supposons alors que l'homéomorphisme φ admette une soudure quasiconforme par le domaine Ω et les applications quasiconformes f et g. Le coefficient de Beltrami

$$\mu(z) := \begin{cases} \mu_{f^{-1}}(z) & \text{si} \quad z \in \Omega \\ \mu_{g^{-1}}(z) & \text{si} \quad z \in \Omega^* \\ 0 & \text{si} \quad z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus (\Omega \cup \Omega^*) \end{cases}$$

est mesurable et satisfait $\|\mu\|_\infty < 1$ tout comme $\mu_{f^{-1}}$ et $\mu_{g^{-1}}$, car f^{-1} et g^{-1} sont quasiconformes. Par le théorème d'existence de Morrey, il existe une application quasiconforme h avec $\mu_h = \mu$ presque partout. Alors la restriction de h à Ω possède la même dilatation complexe que f^{-1} et donc $h \circ f : \mathbb{H} \to h(\Omega)$ est conforme par la partie unicité du théorème de Morrey. De même, $h \circ g : \mathbb{H}^* \to h(\Omega^*)$ est conforme. Ainsi, $\varphi = f^{-1} \circ g = (h \circ f)^{-1} \circ (h \circ g) \in \mathrm{SC}(h(\Omega))$ admet une soudure conforme. $\square$

Remarque 4.7. On a montré que si φ soude un domaine Ω quasiconformément, alors elle soude $h(\Omega)$ conformément, où h est un certain automorphisme quasiconforme de $\widehat{\mathbb{C}}$. En particulier, si φ soude un disque D quasiconformément, par exemple $D = \mathbb{H}$, alors elle soude un quasidisque $h(D)$ conformément.

4.3 Théorèmes fondamentaux

Théorème 4.8. *Soit Ω un quasidisque et $f : \mathbb{H} \to \Omega$, $g : \mathbb{H}^* \to \Omega^*$ des transformations conformes. Alors $f^{-1} \circ g : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ est quasimöbius et préserve l'orientation.*

Démonstration. On va construire un homéomorphisme quasiconforme F de $\mathbb{H}$ tel que sa restriction à $\overline{\mathbb{R}}$ soit $f^{-1} \circ g$. Par hypothèse, Ω est un quasidisque, donc il existe une application quasiconforme $h : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ telle que $h(\mathbb{H}) = \Omega$. Appelons r la conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$ et considérons la composée

$$F := f^{-1} \circ h \circ r \circ h^{-1} \circ g \circ r : \mathbb{H} \to \mathbb{H}.$$

C'est un homéomorphisme de $\mathbb{H}$ dans lui-même. Aussi, F préserve l'orientation, car r la renverse deux fois. Finalement, F est quasiconforme, puisque f, g et h le sont et que r est anti-conforme. Comme r agit trivialement sur l'axe réel, $h \circ r \circ h^{-1}$ est l'identité sur $\partial\Omega$. Ainsi, $F = f^{-1} \circ g$ sur $\overline{\mathbb{R}}$. Le théorème 3.17 nous donne que $F|_{\overline{\mathbb{R}}} = f^{-1} \circ g$ est quasimöbius. $\square$

Remarque 4.9. Si on choisit initialement f et g pour qu'elles envoient le point à l'infini sur le même point de $\partial\Omega$, alors $F(\infty) = f^{-1} \circ g(\infty) = \infty$ et $F|_{\mathbb{R}} = f^{-1} \circ g$ est quasisymétrique.

Lemme 4.10. *Un quasicercle est conformément effaçable.*

Démonstration. Soit Γ un quasicercle, disons $\Gamma = F(\overline{\mathbb{R}})$ où F est un homéomorphisme quasiconforme de $\widehat{\mathbb{C}}$. Soit $h \in \mathrm{HC}(\Gamma)$. Alors $h \circ F$ est un homéomorphisme quasiconforme sur $\mathbb{H} \cup \mathbb{H}^*$, donc quasiconforme sur $\widehat{\mathbb{C}}$ par le lemme 3.2. Ainsi, $h = (h \circ F) \circ F^{-1}$ est quasiconforme sur $\widehat{\mathbb{C}}$. De plus, on a $\overline{\partial} h = 0$ sur $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$, c'est-à-dire presque partout puisque $0 = A(\overline{\mathbb{R}}) = A(F(\overline{\mathbb{R}})) = A(\Gamma)$. Par conséquent, h est conforme sur $\widehat{\mathbb{C}}$, donc une transformation de Möbius. $\square$

Corollaire 4.11. *Si Ω est un quasidisque, alors* $\mathrm{SC}^{-1}(\mathrm{SC}(\Omega)) = [\Omega]$.

Le théorème suivant, baptisé "Théorème fondamental de la soudure conforme" par D.H. Hamilton (Ham02, p. 140), est dû à Pfluger (Pfl60).

Théorème 4.12 (Théorème Fondamental de la Soudure Conforme)**.** *Soit φ une quasisymétrie faible de l'axe réel. Alors il existe un quasidisque Ω unique à transformation de Möbius près tel que φ soude Ω conformément.*

Démonstration. Par le théorème de Beurling-Ahlfors 3.8, on sait qu'il existe une application quasiconforme $h : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ telle que $h|_{\mathbb{R}} = \varphi$. Considérons seulement sa restriction $h : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}^*$ et la transformation conforme $\mathrm{Id} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$. On a $\varphi = h = \mathrm{Id}^{-1} \circ h$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ de sorte que φ soude $\mathbb{H}$ quasiconformément. Par le lemme 4.6 et la remarque qui le suit, φ soude alors un quasidisque conformément. Ce quasidisque est unique à transformation de Möbius près, puisque les quasicercles sont conformément effaçables. $\square$

Notons que l'essentiel de la démonstration remonte au lemme 4.6, qui repose entièrement sur le théorème d'existence et d'unicité de Morrey. Lehto et Virtanen emploient une approche différente dans (LV73, p.92). Ils démontrent le théorème 4.12 par approximation. Ils font ensuite appel à ce résultat pour démontrer le théorème de Morrey. Ainsi, le théorème fondamental de la soudure conforme peut être vu comme un outil aussi puissant que le théorème de Morrey.

Un théorème similaire avec des hypothèses plus fortes apparaît dans (Gol69, p.454) sous le nom de "théorème de collage". On réfère parfois aussi à ce type de résultat, dont on semble souvent avoir besoin en analyse complexe (Leh87, p.101), comme "couture conforme" (RS06).

Comme corollaire aux deux derniers théorèmes, on obtient une nouvelle caractérisation des quasicercles.

Corollaire 4.13. *Soit Γ une courbe de Jordan de domaines complémentaires Ω, Ω^* et $f : \mathbb{H} \to \Omega$, $g : \mathbb{H}^* \to \Omega^*$ des transformations conformes. Alors Γ est un quasicercle si et seulement si $f^{-1} \circ g : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ est quasimöbius.*

Démonstration. Si Γ est un quasicercle, alors l'homéomorphisme $f^{-1} \circ g$ est quasimöbius par le théorème 4.8.

Supposons maintenant que $\varphi := f^{-1} \circ g$ soit quasimöbius. En composant φ à gauche par une transformation de Möbius T dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ appropriée, φ devient quasisymétrique et par conséquent une quasisymétrie faible. Par le théorème 4.12, il existe un quasidisque $\widetilde{\Omega}$ tel que $\mathrm{SC}^{-1}([T \circ \varphi]) = [\widetilde{\Omega}]$. Or, $[T \circ \varphi] = [\varphi]$ et $\mathrm{SC}(\Omega) = [\varphi]$, donc $\Omega \in \mathrm{SC}^{-1}([\varphi]) = \mathrm{SC}^{-1}([T \circ \varphi]) = [\widetilde{\Omega}]$, de sorte que Ω est un quasidisque et $\Gamma = \partial\Omega$ est un quasicercle, puisque l'image d'un quasidisque par une transformation de Möbius est un quasidisque. $\square$

Cette caractérisation est reliée à celle de Jerison et Kenig impliquant la mesure harmonique (GM05, Theorem 3.5).

Une autre façon de formuler les théorèmes 4.8 et 4.12 est de dire que l'application de soudure conforme $\mathrm{SC} : J \to \Sigma$ met en bijection les classes de quasidisques et les doubles orbites d'homéomorphismes quasimöbius de la droite réelle. Si on sort de la famille des quasidisques pour inclure les domaines de Jordan plus pathologiques, l'application SC se comporte moins bien. C'est ce qu'on verra dans les deux prochaines sections.

4.4 Non-surjectivité

L'application SC n'est pas surjective sur Σ. En effet, il existe un homéomorphisme φ de $\overline{\mathbb{R}}$ n'appartenant à $\mathrm{SC}(\Omega)$ pour aucun domaine de Jordan Ω. Nous allons donner les grandes lignes de la démonstration la démonstration, suivant un exemple de Vainio (Vai85, Example 2.9, p. 19).

Nous aurons d'abord besoin de quelques lemmes.

Lemme 4.14. *Soit Ω un domaine simplement connexe de $\widehat{\mathbb{C}}$. Si $f : \mathbb{H} \to \Omega$ est une transformation conforme, alors la préimage par f d'un arc dans Ω dont les extrémités sont sur $\partial\Omega$ est un arc dans $\mathbb{H}$ avec ses extrémités sur $\overline{\mathbb{R}}$.*

Remarque 4.15. Notons que la réciproque est fausse. L'image par f d'un arc dans $\mathbb{H}$ avec ses extrémités sur $\overline{\mathbb{R}}$ peut osciller et ne pas avoir d'extrémité bien définie dans $\partial\Omega$.

Une démonstration est donnée dans (Pom92, Proposition 2.14, p.29).

Définition 4.16. Un *arc analytique* est un arc ouvert simple ou une courbe de Jordan $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}$ tel que pour chaque point $\zeta \in \gamma$, il existe une transformation conforme f définie dans un domaine U de $\widehat{\mathbb{C}}$ telle que $\zeta \in f(U)$ et $f^{-1}(\gamma) \subset \overline{\mathbb{R}}$.

Remarque 4.17. Dans la littérature on rencontre habituellement la définition suivante. L'arc γ est dit analytique si chaque point $\zeta \in \gamma$ possède un voisinage V tel qu'il existe une transformation conforme f de $\mathbb{D}$ sur V telle que $f(0) = \zeta$ et $f(\mathbb{D} \cap \mathbb{R}) = f(\mathbb{D}) \cap \gamma$. Cette dernière notion et la définition 4.16 sont équivalentes.

Lemme 4.18. *Soit γ un arc analytique et U un ouvert. Si h est continue sur U et méromorphe sur $U \setminus \gamma$, alors h est méromorphe sur U.*

Démonstration. Soit ζ un point dans $U \cap \gamma$. Puisque γ est analytique, il existe une transformation conforme f définie dans un domaine $V \subset \widehat{\mathbb{C}}$ telle que $\zeta \in f(V)$ et $f^{-1}(\gamma) \subset \overline{\mathbb{R}}$. La composée $h \circ f$ est continue sur l'ouvert $W := f^{-1}(U \cap f(V))$ et méromorphe sur

$$f^{-1}(f(W) \setminus \gamma) = W \setminus f^{-1}(\gamma) \supset W \setminus \overline{\mathbb{R}}.$$

Pour la même raison que la droite réelle est conformément effaçable, $h \circ f$ est alors méromorphe sur tout W. Ainsi, $h = (h \circ f) \circ f^{-1}$ est méromorphe dans le voisinage $f(W)$ de ζ et donc méromorphe sur tout U, puisque ζ est arbitraire. $\square$

Soit $\gamma := \{x+i\sin 1/x : x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$. L'arc $\gamma\cup\{\infty\}$ est analytique car c'est l'image de $\overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\}$ par la fonction $F(z) = z+i\sin 1/z$ qui est méromorphe sur $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ et injective dans un voisinage de $\overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\}$.

Cependant, l'adhérence $\overline{\gamma} = \gamma\cup[-i,i]\cup\{\infty\}$ est topologiquement plus compliquée. Il est bien connu que $\overline{\gamma}$ est connexe, mais n'est pas connexe par arcs. Aussi, l'ensemble $\overline{\gamma}$ n'est pas localement connexe.

Le complémentaire de $\overline{\gamma}$ dans $\widehat{\mathbb{C}}$ possède exactement deux composantes connexes. Soit Ω la composante

$$\{x+iy \in \mathbb{C} : x \neq 0, y > \sin 1/x\} \cup \{iy : y > 1\}$$

au-dessus de $\overline{\gamma}$ et Ω^* l'autre composante. Les domaines Ω et Ω^* sont simplement connexes, mais ne sont pas des domaines de Jordan. On verra que les transformations conformes de ces domaines vers $\mathbb{H}$ s'étendent à presque tout $\overline{\gamma}$, ce qui permet en bout de ligne de construire un homéomorphisme φ de $\overline{\mathbb{R}}$ soudant en quelque sorte Ω et Ω^*. Cependant, parce que γ s'accumule sur le segment $[-i,i]$, on verra que cet homéomorphisme ne peut provenir de domaines de Jordan complémentaires.

Soit $f : \mathbb{H} \to \Omega$ une transformation conforme. Montrons que f^{-1} possède une limite en chaque point de $\gamma\cup\{i,\infty\}$. Pour chaque point ζ de $\gamma\cup\{i,\infty\}$ et chaque paire de suites a et b dans Ω qui convergent vers ζ, on peut construire un domaine de Jordan $\widetilde{\Omega}$ contenu dans Ω et contenant les deux suites a et b en coupant Ω par des arcs de Jordan d'extrémités dans $\partial\Omega$. Le domaine $f^{-1}(\widetilde{\Omega}) \subset \mathbb{H}$ est alors un domaine de Jordan par le lemme 4.14. Par le théorème de Carathéodory-Osgood, f s'étend en un homéomorphisme entre $\overline{f^{-1}(\widetilde{\Omega})}$ et $\overline{\widetilde{\Omega}}$. En particulier, les suites $f^{-1}(a_k)$ et $f^{-1}(b_k)$ convergent vers une même limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ qu'on note $f^{-1}(\zeta)$. Quitte à précomposer f par une transformation de Möbius, on peut supposer que les limites en i et l'infini sont $f^{-1}(i) = 0$ et $f^{-1}(\infty) = \infty$. De plus, un argument d'approximation standard permet de montrer que f^{-1} est continue sur $\gamma\cup\{i,\infty\}$.

De la même façon, si $g : \mathbb{H}^* \to \Omega^*$ est une transformation conforme, alors g^{-1} possède un prolongement continu à $\gamma\cup\{-i,\infty\}$ et on peut supposer que $g^{-1}(-i) = 0$ et $g^{-1}(\infty) = \infty$.

Considérons la fonction $\varphi := f^{-1}\circ g : \overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\} \to \overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\}$ prolongée en 0 par $\varphi(0) := 0$. En utilisant les mêmes idées que ci-haut et le fait que l'inverse d'une fonction croissante continue est continue, on arrive à montrer que φ est un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{R}}$. On obtient finalement le résultat suivant.

Théorème 4.19. *L'homéomorphisme φ n'admet pas de soudure conforme.*

Démonstration. Supposons au contraire qu'il existe un domaine de Jordan U de complémentaire $U^* := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{U}$ et des transformations conformes $\hat{f} : \mathbb{H} \to U$ et $\hat{g} : \mathbb{H}^* \to U^*$ telles que $\hat{f}^{-1} \circ \hat{g} = \varphi$. On a alors que $\hat{f}^{-1} \circ \hat{g} = f^{-1} \circ g$ sur $\overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$. Maintenant, on a $f(\overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}) = g(\overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}) = \gamma \cup \{\infty\}$ et donc $\hat{f} \circ f^{-1} = \hat{g} \circ g^{-1}$ sur $\gamma \cup \{\infty\}$. La fonction

$$h(z) := \begin{cases} \hat{f} \circ f^{-1}(z) & \text{si} \quad z \in \Omega \cup \gamma \cup \{\infty\} \\ \hat{g} \circ g^{-1}(z) & \text{si} \quad z \in \Omega^* \end{cases}$$

définit un homémomorphisme de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus [-i, i]$ dans $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \hat{f}(0)$ qui est conforme sur $\Omega \cup \Omega^*$. La courbe $\gamma \cup \{\infty\}$ étant analytique, h est alors conforme dans tout $\widehat{\mathbb{C}} \setminus [-i, i]$. Ceci est impossible puisque la sphère privée d'un point $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \hat{f}(0)$ ne peut être envoyée conformément sur un domaine dont le complément possède plus d'un point par le théorème de représentation de Riemann et le théorème de Liouville. □

4.5 Non-injectivité

4.5.1 Mise en garde

Rappelons qu'on a montré que pour tout domaine de Jordan Ω, on a

$$\mathrm{SC}^{-1}(\mathrm{SC}(\Omega)) = \{h(\Omega) : h \in \mathrm{HC}(\partial\Omega)\}.$$

On en a déduit le corollaire 4.4 stipulant que si $\mathrm{HC}(\partial\Omega) = \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$, alors

$$\mathrm{SC}^{-1}(\mathrm{SC}(\Omega)) = \{h(\Omega) : h \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})\} = [\Omega].$$

Une autre façon d'énoncer ce résultat est de dire que Ω est l'unique domaine de Jordan (à transformation de Möbius près) soudé conformément par l'homéomorphisme associé φ si $\partial\Omega$ est conformément effaçable. Plusieurs auteurs ont affirmé sans preuve que la réciproque était aussi vraie (KNS90, Corollary II.2, p.304) (Bis90, pp.324-325) (Bis94, pp.324-325) (Bis07, Remark 2, pp.617-618) (AJKS09, Section 2.3, p.7). D'autres, comme Oikawa (Oik61, Lemma 2.(a), pp.40-41), ont donné une fausse démonstration de la réciproque comme ceci :

Raisonnement erroné. Supposons que $\partial\Omega$ n'est pas conformément effaçable, alors il existe un homéomorphisme h de la sphère conforme hors de $\partial\Omega$ qui n'est pas une transformation de Möbius. Alors $\mathrm{SC}(h(\Omega)) = \mathrm{SC}(\Omega)$, mais $h(\Omega)$ n'est pas l'image de Ω par une transformation de Möbius, puisque h n'est pas une transformation de Möbius. $\square$

Le raisonnement semble demander une justification, puisque *a priori* ce n'est pas parce que h n'est pas Möbius qu'elle n'envoie aucun ensemble sur un ensemble qui lui est Möbius équivalent. Autrement dit, il se pourrait qu'on ait l'égalité $h(\Omega) = T(\Omega)$ sans que $h = T$. Dans une communication privée, Christopher Bishop a admis penser que le raisonnement est tout simplement faux, en suggérant comment construire une courbe de Jordan Γ et un homéomorphisme de $\widehat{\mathbb{C}}$ conforme hors de Γ qui n'est pas Möbius mais qui envoie Γ et ses deux domaines complémentaires sur eux-mêmes. Je n'ai réussi à concrétiser cette suggestion que partiellement, en construisant un *arc* de Jordan laissé invariant par un homéomorphisme de la sphère conforme hors de l'arc. Il semble ne manquer qu'un petit argument pour refermer l'arc de Jordan en une courbe.

Cela laisse cependant la question suivante irrésolue.

Question 4.20. *Si Ω est un domaine de Jordan et*

$$\{h(\Omega) : h \in \mathrm{HC}(\partial\Omega)\} = \{h(\Omega) : h \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})\},$$

alors est-ce que $\mathrm{HC}(\partial\Omega) = \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ *?*

En termes de soudure conforme, cette question se reformule comme suit.

Question 4.21. *Si Ω est un domaine de Jordan tel que les seuls autres domaines de Jordan donnant lieu à la même fonction soudante sont ses images par des transformations de Möbius, c'est-à-dire si* $\mathrm{SC}^{-1}(\mathrm{SC}(\Omega)) = [\Omega]$*, alors est-ce que $\partial\Omega$ est conformément effaçable ?*

4.5.2 Courbes de Jordan d'aire positive

Il existe des courbes de Jordan d'aire positive (Sag94, Chapitre 8). La courbe de Peano est un exemple bien connu d'arc qui remplit le carré unité, mais n'est pas un arc simple. On peut modifier la construction de Peano pour obtenir un arc simple d'aire positive (Osg03). De telles courbes sont appelées courbes de Osgood. Par exemple, si C est un ensemble de Cantor dans $\mathbb{R}$ de longueur positive, alors on peut toujours faire passer une courbe de Jordan par le produit cartésien $C \times C$ qui a alors une aire positive (Sag94, Section 8.4, p.141).

Un ensemble fermé E d'aire positive n'est jamais conformément effaçable. En effet, le théorème d'existence de Morrey permet de trouver un homéomorphisme quasiconforme h de $\widehat{\mathbb{C}}$ tel que $\mu_h = \frac{1}{2}1_E$ presque partout. Un tel homéomorphisme est conforme sur $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$, mais n'est pas une transformation de Möbius puisque $\overline{\partial} h$ est non nul sur un ensemble d'aire positive.

Une courbe de Jordan d'aire positive n'est donc pas conformément effaçable. Cependant, il n'est pas clair (voir la question 4.21) qu'on peut en déduire directement qu'il existe un domaine de Jordan dans une classe d'équivalence distincte donnant lieu à la même soudure conforme. On arrive toutefois à le montrer avec plus d'efforts.

Théorème 4.22. *Soit Ω un domaine de Jordan tel que la courbe $\partial\Omega$ ait une aire positive. Alors il existe un domaine de Jordan $\widetilde{\Omega}$ avec $[\Omega] \neq [\widetilde{\Omega}]$ tel que* $\mathrm{SC}(\Omega) = \mathrm{SC}(\widetilde{\Omega})$.

L'énoncé de ce théorème apparaît dans (KNS90, Theorem II.3, p.305) avec une démonstration incomplète. L'idée est d'utiliser le théorème d'existence de Morrey pour obtenir une large classe d'homéomorphismes conformes hors de la courbe de Jordan $\partial\Omega$ et de montrer qu'il est impossible que l'image de Ω par ces homéomorphismes soit toujours Möbius-équivalente à Ω en utilisant un argument de dimension. Merci à Thomas Ransford et Hugo Chapdelaine de m'avoir aidé à compléter la démonstration.

Nous aurons besoin de plusieurs résultats préliminaires, à commencer par certains sur la topologie du groupe $\mathrm{Aut}(\Omega)$ et d'un sous-groupe particulier de ce dernier.

Étant donné un domaine quelconque U, on note $\mathrm{Möb}(U)$ le groupe de tous les automorphismes conformes de U qui sont restrictions de transformations de Möbius de la sphère. Autrement dit $\mathrm{Möb}(U)$ contient toutes les transformations de Möbius T telles que $T(U) = U$. Ce groupe reflète les symétries de U. Plus U possède de symétries, plus $\mathrm{Möb}(U)$ sera grand. Par exemple, on a $\mathrm{Möb}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ et $\mathrm{Möb}(\mathbb{H}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$. En général, $\mathrm{Möb}(U)$ sera un sous-groupe strict de $\mathrm{Aut}(U)$. Par exemple, $\mathrm{Möb}(P_n) \approx D_n$, où P_n est l'intérieur d'un polygone régulier à n côtés et D_n est le groupe dihédral à $2n$ éléments, alors que $\mathrm{Aut}(P_n)$ est conjugué à $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \approx \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ par le théorème de représentation de Riemann. Pour un domaine totalement asymétrique, comme l'intérieur d'un triangle scalène, on aura $\mathrm{Möb}(U) = \{\mathrm{Id}\}$.

Définition 4.23. Soit X un espace topologique et G un groupe d'homéomorphismes de X. On dit que *G agit de façon discontinue* sur X si chaque point $x \in X$ possède un voisinage V tel que l'ensemble $\{g \in G : g(V) \cap V \neq \varnothing\}$ soit fini.

Il existe une classification due à Timo Erkama de tous les domaines U tels que $\mathrm{Möb}(U)$ n'agit pas de façon discontinue sur U (Erk85, Theorem 1). Si U est un tel domaine, alors il existe une transformation de Möbius qui envoie U sur un des domaines suivants :

1. la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$;
2. le plan complexe $\mathbb{C}$;
3. le plan privé de l'origine $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
4. une couronne $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$ où $0 \leq r < 1$;
5. la bande $B := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im\mathrm{m}\, z < 1\}$;
6. un domaine de la forme $\exp(\alpha e^{i\beta} B)$ où $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ et $\alpha \in (0, 2\pi \cos \beta]$, qui consiste en un secteur angulaire si $\beta = 0$ et un loxodrome, c'est-à-dire un domaine délimité par deux spirales logarithmiques, sinon.

En particulier, si Ω est un domaine de Jordan et $\partial\Omega$ a une aire positive, alors $\mathrm{M\ddot{o}b}(\Omega)$ agit de façon discontinue sur Ω puisque tout les domaines énumérés ci-haut ont une frontière d'aire nulle.

Soit $f : \mathbb{H} \to \Omega$ une transformation conforme. Alors on a

$$f^{-1} \circ \mathrm{Aut}(\Omega) \circ f = \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \approx \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$$

et $f^{-1} \circ \mathrm{M\ddot{o}b}(\Omega) \circ f$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ qui agit de façon discontinue sur $\mathbb{H}$.

Nous aurons maintenant besoin de comprendre la topologie de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ en relation avec ses sous-groupes discontinus.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ peut être muni de la norme

$$\left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\|_F := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

connue sous le nom de norme de Frobenius. Le groupe projectif

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{Id}\}$$

peut ensuite être muni de la topologie quotient qu'on notera $\mathcal{T}$, ce qui en fait un groupe topologique.

Le groupe de biholomorphismes $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ devient un espace métrique lorsque muni de la distance sphérique uniforme

$$\sigma(g, h) := \sup_{z \in \widehat{\mathbb{C}}} s(g(z), h(z)).$$

On peut montrer que les deux groupes $(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}), \mathcal{T})$ et $(\mathrm{Aut}(\mathbb{H}), \sigma)$ sont homéomorphes via l'isomorphisme habituel (Bea95, Theorem 4.5.1, p.78).

Lemme 4.24. *L'isomorphisme de groupes*

$$\begin{array}{rrcl} \Phi & : & (\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}), \mathcal{T}) & \to & (\mathrm{Aut}(\mathbb{H}), \sigma) \\ & & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (z \mapsto (az+b)/(cz+d)) \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Il en découle que $(\mathrm{Aut}(\mathbb{H}), \sigma)$ est un groupe topologique et que $(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}), \mathcal{T})$ est métrisable.

Un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ est dit *discret* s'il est discret comme sous-ensemble dans la distance σ, c'est-à-dire si tous ses éléments sont isolés. Pour les sous-groupes de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, les notions de groupe discontinu et de groupe discret sont les mêmes (Bea95, Theorem 5.3.2, p.95). De tels sous-groupes sont appelés groupes Fuchsiens. Nous aurons besoin d'une seule des deux implications.

Lemme 4.25. *Soit $G \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ un sous-groupe agissant de façon discontinue sur $\mathbb{H}$. Alors G est un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.*

Démonstration. Procédons par contraposée. Si G n'est pas discret, alors il existe un élément $g \in G$ et une suite d'éléments distincts $(g_k)_{k\geq 1} \subset G \setminus \{g\}$ qui converge uniformément vers g. En particulier, pour chaque $z \in \mathbb{H}$ on a que $g_k(z)$ converge vers $g(z) \in \mathbb{H}$. Ainsi, si V est un voisinage de z dans $\mathbb{H}$, on a $g_k(z) \in g(V)$ pour une infinité d'indices k, donc $g^{-1}g_k(V) \cap V \neq \varnothing$ pour ces indices. Par conséquent, G n'agit pas de façon discontinue sur $\mathbb{H}$. $\square$

Puisque $\mathcal{G} := f^{-1} \circ \mathrm{Möb}(\Omega) \circ f$ agit de façon discontinue sur $\mathbb{H}$, on a que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$. On va montrer que cela implique que $\mathcal{G}$ agit sur le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ par composition à gauche non seulement de façon discontinue, mais de façon proprement discontinue, notion que l'on définit immédiatement.

Définition 4.26. Soit X un espace topologique et G un groupe d'homéomorphismes de X. On dit que G *agit de façon proprement discontinue* sur X si chaque point $x \in X$ possède un voisinage V tel qu'on ait $\{g \in G : g(V) \cap V \neq \varnothing\} = \{\mathrm{Id}\}$.

Lemme 4.27. *Si $G \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ est un sous-groupe discret, alors G agit de façon proprement discontinue sur $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ par composition à gauche.*

Démonstration. On procède encore une fois par contraposée. Si g n'agit pas de façon proprement discontinue sur $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, c'est qu'il existe un $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ tel que pour tout voisinage V de h, il existe un $g \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}$ avec $gV \cap V \neq \varnothing$. En prenant

$$V_k := \{v \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) : \sigma(v,h) < 1/k\},$$

on peut trouver une suite $(g_k)_{k\geq 1} \subset G \setminus \{\mathrm{Id}\}$ et des éléments $h_k \in V_k$ tels que $g_k h_k \in V_k$. Par définition des voisinages V_k, les suites h_k et $g_k h_k$ convergent toutes deux uniformément vers h lorsque k tend vers l'infini. Puisque $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ est un groupe topologique, on a que $h_k^{-1} \to h^{-1}$ et que

$$g_k = (g_k h_k) \circ h_k^{-1} \to h \circ h^{-1} = \mathrm{Id}$$

lorsque k tend vers l'infini. Ainsi, l'identité n'est pas isolée dans G, donc G n'est pas discret. □

On a le résultat général suivant (Mun75, Theorem 81.5, p.490).

Lemme 4.28. *Soit X un espace de Hausdorff localement connexe par arcs et G un groupe qui agit de façon proprement discontinue sur X. Alors la projection canonique π de X sur X/G est un revêtement, où X/G est muni de la topologie quotient.*

Il est facile de voir que l'espace $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Par l'isomorphisme Φ on obtient que $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ l'est aussi. De plus, $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ est un espace métrique, donc un espace de Hausdorff. Par conséquent, le lemme précédent s'applique avec $X = \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ et $G = \mathcal{G}$, de sorte qu'on a un revêtement de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ sur $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})/\mathcal{G}$.

Supposons pour la suite que les points $-1, 0, \infty$ appartiennent à la courbe $\partial\Omega$. Il est toujours possible de s'en assurer en appliquant une transformation de Möbius à la courbe.

Lemme 4.29. *Soit Y l'ensemble de toutes les transformations conformes h de Ω dans $\widehat{\mathbb{C}}$ fixant $-1, 0, \infty$ et telles que $h(\Omega) = T(\Omega)$ pour une certaine transformation de Möbius $T \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$. La distance σ fait de Y un espace métrique. On a une surjection continue $F : \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \to Y$ donnée par*

$$F(g) := \Big(z \mapsto [fgf^{-1}(-1), fgf^{-1}(0), fgf^{-1}(z), fgf^{-1}(\infty)]\Big).$$

L'espace Y est homéomorphe à l'espace quotient $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})/F$ qui est égal à $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})/\mathcal{G}$.

Démonstration. Vérifions premièrement que F est à valeurs dans Y. Si g est un automorphisme de $\mathbb{H}$, alors fgf^{-1} est un automorphisme de Ω. Si T est l'unique transformation de Möbius qui envoie les points $fgf^{-1}(-1), fgf^{-1}(0), fgf^{-1}(\infty)$ sur $0, 1, \infty$, alors

$F(g) = Tfgf^{-1}$ est une transformation conforme entre Ω et $T(\Omega)$ qui fixe les points $-1, 0, \infty$ au bord.

Si h est une transformation conforme de Ω dans $\widehat{\mathbb{C}}$ fixant $-1, 0, \infty$ et telle que $h(\Omega) = T(\Omega)$ pour une certaine transformation de Möbius T, alors la composée $g := f^{-1}T^{-1}hf$ appartient à $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$. De plus, la fonction

$$F(g)(z) = [T^{-1}h(-1), T^{-1}h(0), T^{-1}h(z), T^{-1}h(\infty)]$$

fixe $-1, 0, \infty$ et est de la forme $S \circ h$ pour une certaine transformation de Möbius S. Or, h fixe également ces trois points, donc la transformation $S = (S \circ h) \circ h^{-1}$ les fixe aussi et est alors l'identité. Ainsi, $F(g) = h$, ce qui montre que F est surjective.

Il est technique mais élémentaire de vérifier de F est continue. Il suit de la définition de la topologie quotient que F est un homéomorphisme entre $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})/F$ et Y.

Si $F(g_1) = F(g_2)$, alors on a $S_1fg_1f^{-1} = S_2fg_2f^{-1}$ pour certaines transformations de Möbius S_j. En particulier, on a $S_1(\Omega) = S_2(\Omega)$ donc $S_1^{-1}S_2 \in \mathrm{Möb}(\Omega)$ et

$$g_1g_2^{-1} = f^{-1}S_1^{-1}S_2f \in f^{-1}\,\mathrm{Möb}(\Omega)f = \mathcal{G}.$$

Réciproquement, si $g_1g_2^{-1} \in \mathcal{G}$, alors $F(g_1) \circ F(g_2)^{-1}$ est une transformation de Möbius qui fixe $-1, 0, \infty$, donc c'est l'identité et on a $F(g_1) = F(g_2)$. Par conséquent, on a

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H})/F = \mathrm{Aut}(\mathbb{H})/\mathcal{G}.$$

□

Finalement, on aura besoin de la conséquence suivante au théorème de l'invariance du domaine de Brouwer (Mun75, Section 62, p.381).

Lemme 4.30. *Soit $m > n \geq 1$ des entiers. Il n'existe pas d'injection continue d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Le théorème de l'invariance du domaine de Brouwer stipule qu'une injection continue d'un ouvert de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^k$ est automatiquement un homéomomorphisme. Si on a une injection g d'un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, alors on a une injection continue de U dans $\mathbb{R}^m$, puisque $\mathbb{R}^n$ s'inclut isométriquement dans $\mathbb{R}^m$. Par le théorème de Brouwer, $g(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Ceci est impossible puisque $g(U)$ est inclus dans $\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}$ qui est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}^m$. □

On a maintenant tout ce qu'il faut pour montrer que l'application de soudure conforme SC n'est pas injective pour les courbes de Jordan d'aire positive.

Démonstration du théorème 4.22. Supposons, afin d'obtenir une contradiction, qu'on ait l'égalité $\mathrm{SC}^{-1}(\mathrm{SC}(\Omega)) = [\Omega]$. Alors pour tout homéomorphisme h de la sphère conforme hors de $\partial\Omega$, on a $h(\Omega) = T(\Omega)$ pour une certaine transformation de Möbius T. Sans perte de généralité, les points $-1, 0, \infty$ appartiennent à la courbe $\Gamma = \partial\Omega$. Si μ est un coefficient de Beltrami à support dans Γ avec $\|\mu\|_\infty < 1$, alors la solution quasiconforme h_μ à l'équation de Beltrami qui fixe $-1, 0, \infty$ est conforme dans $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$, donc $h_\mu(\Omega) = T(\Omega)$ pour une certaine transformation de Möbius $T = T_\mu$.

Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccc} W & : & \mathbb{B}_\infty(\Gamma) & \to & Y \\ & & \mu & \mapsto & h_\mu|_\Omega, \end{array}$$

où $\mathbb{B}_\infty(\Gamma)$ désigne la boule unité de $L^\infty(\Gamma)$. Cette fonction est continue et même lipschitzienne par une version du théorème de Ahlfors-Bers (AB60, Lemma 17, p.398) montrant qu'il existe une constante universelle c telle que

$$s(h_\mu(z), h_\nu(z)) \leq c\|\mu - \nu\|_\infty.$$

De plus, W est injective. En effet, si $W(\mu_1) = W(\mu_2)$ sur Ω, alors leur prologement continu à $\Gamma = \partial\Omega$ coïncide également, de sorte que

$$\mu_1 = \overline{\partial} W(\mu_1)/\partial W(\mu_1) = \overline{\partial} W(\mu_2)/\partial W(\mu_2) = \mu_2$$

presque partout sur Γ, donc $\mu_1 = \mu_2$ dans l'espace $\mathbb{B}_\infty(\Gamma)$.

Maintenant, Y est envoyé sur $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})/\mathcal{G}$ par l'homéomorphisme F^{-1} défini précédemment. Puisque la projection $\pi : \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H})/\mathcal{G}$ est un revêtement, lorsque U est un ouvert assez petit de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})/\mathcal{G}$, la préimage $\pi^{-1}(U)$ est constituée de composantes disjointes telles que la restriction de π à chacune de ces composantes est un homéomorphisme. Donc, si V est un voisinage de Id_Ω dans Y assez petit, on peut définir un homéomorphisme π^{-1} sur $F^{-1}(V)$. On a donc une injection continue $\Phi^{-1}\pi^{-1}F^{-1}W$ de l'ouvert $W^{-1}(V) \subset \mathbb{B}_\infty(\Gamma)$ vers $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Quitte à rapetisser encore l'ouvert V, on peut relever l'image obtenue dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. L'espace $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ s'inclut isométriquement dans $\mathbb{R}^4$ par l'application

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d).$$

En bout de ligne, on obtient une injection continue d'un voisinage de $0 = W^{-1}(\mathrm{Id}_\Omega)$ dans $\mathbb{B}_\infty(\Gamma)$ vers l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$.

Ceci est impossible, puisque $\mathbb{R}^5$ s'injecte continûment dans tout ouvert de $\mathbb{B}_\infty(\Gamma)$ autour de 0. En effet, un tel ouvert contient une boule ouverte $\varepsilon\mathbb{B}_\infty(\Gamma)$ pour un certain

$\varepsilon \in (0,1)$. Si on partitionne Γ en 5 parties Γ_j d'aire positive, alors $(-\varepsilon,\varepsilon)^5$, qui est homéomorphe à $\mathbb{R}^5$, s'injecte continûment dans $\varepsilon\mathbb{B}_\infty(\Gamma)$ en posant pour chaque quintuplet $x \in (-\varepsilon,\varepsilon)^5$ un coefficient de Beltrami μ_x constant sur chacune des cinq parties, c'est-à-dire

$$\mu_x := \sum_{j=1}^{5} x_j 1_{\Gamma_j}.$$

Puisque les parties Γ_j sont d'aire positive on a $\|\mu_x - \mu_y\|_\infty = \|x-y\|_\infty$, ce qui montre à la fois l'injectivité et la continuité de l'application $x \mapsto \mu_x$. Il y aurait donc une injection continue de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$, ce qui contredit le lemme 4.30. $\square$

Notons que même si $\partial\Omega$ a une aire nulle, il se peut que $\mathrm{SC}^{-1}(\mathrm{SC}(\Omega)) \neq [\Omega]$. En fait, il existe des domaines de Jordan Ω tels que $\partial\Omega$ a une dimension de Hausdorff 1, mais $\mathrm{SC}^{-1}(\mathrm{SC}(\Omega))$ est dense dans l'ensemble des domaines de Jordan, relativement à la distance de Hausdorff sphérique. De telles courbes $\partial\Omega$ sont appelées *courbes flexibles* et correspondent à des fonctions soudantes log-singulières (Bis94) (Bis07).

4.6 Exemples

Le seul exemple explicite de soudure conforme qu'on ait vu jusqu'à présent est l'exemple trivial d'un disque. L'objectif de cette section est de présenter quelques exemples de domaines de Jordan avec leur fonction soudante associée.

4.6.1 Secteurs angulaires et fonctions puissances

Soit $\alpha \in (0,1)$ et $\Omega := \{z \in \mathbb{C}^\times : 0 < \arg z < \alpha\pi\}$. Alors la fonction

$$f(z) := \exp(\alpha \log z)$$

et la fonction

$$g(z) := \exp((2-\alpha)\log z)$$

envoient $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}^*$ conformément sur Ω et Ω^*, où le logarithme utilisé prend son argument dans l'intervalle $[-\pi,\pi)$.

On a $f^{-1}(z) = \exp(\log z/\alpha)$. Pour $x > 0$ on a donc

$$\varphi(x) = f^{-1} \circ g(x) = \exp((2-\alpha)\log x/\alpha) = x^{\frac{2-\alpha}{\alpha}},$$

tandis que pour $x < 0$ on a

$$\begin{aligned}\varphi(x) = f^{-1} \circ g(x) &= f^{-1}(\exp[(2-\alpha)(\log|x| - i\pi)]) \\ &= f^{-1}(\exp[(2-\alpha)\log|x| + i\pi\alpha)]) \\ &= \exp((2-\alpha)\log|x|/\alpha + i\pi) \\ &= -|x|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}.\end{aligned}$$

La fonction soudante pour Ω est donc

$$\varphi(x) = \operatorname{sgn}(x)|x|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}.$$

Cette formule est en fait vraie pour tout $\alpha \in (0,2)$; il faut simplement faire attention au choix de la branche du logarithme lorsqu'on considère f^{-1} pour le démontrer.

Notons que si $\alpha \neq 1$, la dérivée de φ en zéro est soit nulle ou infinie. Ainsi, φ ou son inverse est contractante en zéro, et c'est précisément ce qui influence à la hausse sa constante de quasisymétrie. L'origine correspond à $f(0) = g(0) = 0$, c'est-à-dire le “coin” du secteur angulaire Ω. Par conséquent, il apparaît qu'une section de la courbe $\partial\Omega$ qui est loin d'être circulaire correspond pour φ à un intervalle sur lequel cet homéomorphisme est loin d'être linéaire et réciproquement. Il serait intéressant de quantifier cette relation.

Il semble que l'on pourrait aussi trouver de façon explicite la fonction soudante associée à un triangle, en utilisant la formule de Schwarz-Christoffel pour calculer les applications conformes sur son intérieur et son extérieur. Cela ne semble pas avoir été fait dans la littérature.

Pour les polygones à quatre côtés et plus, on pourrait connaître la forme de la fonction soudante, mais pas explicitement, puisqu'il y a des paramètres à déterminer dans la formule de Schwarz-Christoffel. Cependant, dans le cas de polygones réguliers, les paramètres se trouvent facilement. La soudure conforme d'un carré et quelques autres exemples sont calculés dans (SM04, Section 4).

4.6.2 Lemniscates et produits de Blaschke

Soit P un polynôme de degré n et supposons que la lemniscate

$$\Gamma := \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| = 1\} = P^{-1}(\mathbb{T})$$

soit une courbe de Jordan, de sorte que

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| < 1\} = P^{-1}(\mathbb{D})$$

soit un domaine de Jordan. Soit $f : \mathbb{D} \to \Omega$ une transformation conforme. Alors on a que $P \circ f$ est une fonction continue du disque fermé dans lui-même ayant n zéros et telle que $|P \circ f(z)| = 1$ lorsque $|z| = 1$. On peut prolonger $P \circ f$ à toute la sphère par réflexion de Schwarz selon $\mathbb{T}$. La fonction méromorphe obtenue possède n zéros dans $\mathbb{D}$ et n pôles symétriquement disposés par rapport à $\mathbb{T}$ et est donc un produit de Blaschke de degré n, disons $P \circ f(z) = B(z)$.

Soit maintenant $g : \mathbb{D}^* \to \Omega^*$ une transformation conforme telle que $g(\infty) = \infty$ et $g'(\infty) > 0$. La composée $P \circ g : \mathbb{D}^* \to \mathbb{D}^*$ se prolonge continûment au cercle et y satisfait $|P \circ f(z)| = 1$. Par réflexion de Schwarz on peut étendre $P \circ g$ en un produit de Blaschke sur $\widehat{\mathbb{C}}$ ayant un pôle d'ordre n en l'infini, un zéro d'ordre n en 0 et une dérivée positive en l'infini. Il suit que $P \circ g(z) = z^n$.

Sur le cercle unité $\mathbb{T}$, l'homéomorphisme $\varphi := g^{-1} \circ f$ satisfait

$$\phi(z)^n = P \circ g \circ \varphi(z) = P \circ f(z) = B(z).$$

On a donc que $\varphi(z) = B(z)^{1/n}$.

Dans l'article (EKS10), on montre également la réciproque, c'est-à-dire que pour tout homéomorphisme du cercle de la forme $\varphi(z) = B(z)^{1/n}$ où B est un produit de Blaschke de degré n, on peut trouver un polynôme P de degré n tel que φ soude $P^{-1}(\mathbb{D})$ conformément.

Notons qu'il existe un théorème de Hilbert sur les lemniscates polynômiales à l'effet que ces dernières sont denses dans l'ensemble des courbe de Jordan dans $\mathbb{C}$ relativement à la distance de Hausdorff (Ran95, Theorem 5.5.8). Ainsi, cet exemple couvre une famille assez grande de quasicercles.

Dans certains cas très symétriques, on peut déterminer exactement le produit de Blaschke B associé au polynôme P. Soit $c \in [0, 1)$ et $P(z) := z^n - c$. Puisque le seul point critique de P est 0 et que $|P(0)| = c < 1$, le domaine $\Omega = P^{-1}(\mathbb{D})$ est un domaine de Jordan (EKS10, Proposition 2.1). Soit f une transformation conforme de $\mathbb{D}$ sur Ω qui envoie 0 sur 0 et telle que $f^{-1}(c^{1/n}) > 0$. Puisque $P(e^{2\pi i/n}z) = P(z)$, le domaine Ω possède une symétrie de rotation d'un n-ième de tour, c'est-à-dire

$$e^{2\pi i/n}\Omega = \Omega.$$

Ainsi, on a également que $e^{2\pi i/n}f$ est une transformation conforme du disque sur Ω. La transformation $r := f^{-1} \circ e^{2\pi i/n}f$ est un automorphisme conforme du disque qui fixe l'origine, donc une rotation. De plus, $r^n = f^{-1} \circ e^{2\pi ni/n} f = \mathrm{Id}$, ce qui montre que l'ordre de r divise n. Supposons que $\mathrm{Id} = r^k = f^{-1} \circ e^{2\pi ki/n} f$. Alors $f(z) = e^{2\pi ki/n} f(z)$ pour chaque $z \in \mathbb{D}$. Si $z \neq 0$, alors $f(z) \neq 0$ et on a $1 = e^{2\pi ki/n}$, donc k est un multiple de n. Par conséquent, l'ordre de r est exactement n et on a $e^{2\pi i/n} f(z) = f(e^{2\pi i/n} z)$.

Rappelons que la composée $B := P \circ f$ est un produit de Blaschke de degré n. Notons aussi que les points $c^{1/n} e^{2\pi ki/n}$ sont les zéros de P. Alors les points

$$w_k := f^{-1}(c^{1/n} e^{2\pi ki/n}) = e^{2\pi ki/n} f^{-1}(c^{1/n}) = e^{2\pi ki/n} w_0$$

sont les zéros de B. On a donc

$$B(z) = e^{i\theta} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z - w_k}{1 - \overline{w_k} z} = e^{i\theta} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z - e^{2\pi ki/n} w_0}{1 - e^{-2\pi ki/n} \overline{w_0} z} = e^{i\theta} \frac{z^n - w_0^n}{1 - \overline{w_0}^n z^n}.$$

Finalement, on a d'une part

$$B(0) = -e^{i\theta} w_0^n$$

et d'autre part

$$B(0) = P(f(0)) = P(0) = -c.$$

Puisqu'on a normalisé la transformation conforme f de sorte que $w_0 = f^{-1}(c^{1/n}) > 0$, on a que $e^{i\theta} = 1$ et que $w_0^n = c$, donc

$$B(z) = \frac{z^n - c}{1 - cz^n}.$$

Pour un polynôme P général, j'ignore s'il est possible de donner une formule pour B en fonction des coefficients de P ou de ses racines.

4.7 Espaces de Teichmüller

4.7.1 Espaces de modules et espaces de Teichmüller

Une question naturelle dans l'étude des surfaces de Riemann est de savoir quand deux surfaces sont conformément équivalentes. Dans cette veine s'inscrit le célèbre théorème d'uniformisation de Poincaré, Klein et Koebe, qui généralise le théorème de représentation de Riemann.

Théorème 4.31 (Théorème d'uniformisation)**.** *Soit S une surface de Riemann simplement connexe. Alors S est conformément équivalente à exactement une des trois surfaces $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.*

Dans le cas où S est multiplement connexe, il y a une infinité de surfaces de Riemann R qui sont homéomorphes à S, mais pas conformément équivalentes. Par exemple, tout domaine planaire doublement connexe est conformément équivalent au plan épointé $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ou à une couronne $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$, où $0 \leq r < 1$, et ces domaines sont tous conformément non-équivalents. Un autre exemple bien connu depuis Riemann est celui des tores complexes. Tout tore muni d'une structure conforme peut s'écrire comme un quotient $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ pour un certain $\tau \in \mathbb{H}$. De plus, deux tels tores $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ et $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau'\mathbb{Z})$ sont conformément équivalents si et seulement si τ et τ' reposent dans la même orbite du groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Ainsi, l'espace de toutes les structures conformes possibles sur un tore peut être paramétré par un seul nombre complexe $\tau \in \mathbb{H}/\,\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Le problème de comprendre et paramétrer l'espace de toutes les surfaces de Riemann d'un même type topologique quotienté par l'équivalence conforme est d'une importance fondamentale. Le théorème d'uniformisation revient à dire que cet espace est réduit à un point (la sphère de Riemann) si S est homéomorphe à une sphère et à deux points (le plan et le demi-plan) si S est homéomorphe à un disque. Dans le cas multiplement connexe, cet espace devient plus compliqué. Le cas des surfaces de Riemann compactes sans bord est celui le plus étudié, probablement parce qu'il est plus simple. En effet, le théorème de classification des surfaces (Mun75, Chapitre 12) dit qu'une telle surface est toujours homéomorphe à une somme topologique de tores, autrement dit une sphère à laquelle on a ajouté des poignées. Soit S une surface de Riemann compacte de genre g, c'est-à-dire une surface homéomorphe à une sphère ayant g poignées, où $g \geq 2$. L'espace M_g de toutes les structures conformes différentes possibles pour S est appelé *espace de modules de Riemann*. Suivant des intuitions géométriques, Riemann conjectura qu'on pouvait décrire l'espace M_g par $3g-3$ paramètres complexes. Remarquons que cette formule ne fonctionne pas pour $g = 1$. Il y a une dichotomie parce que le revêtement universel holomorphe de S est $\mathbb{C}$ dans le cas d'un tore $g = 1$, tandis que c'est le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ lorsque $g \geq 2$.

La théorie des espaces de Teichmüller émergea des tentatives de donner un sens précis à cette conjecture de Riemann et de la démontrer par des méthodes analytiques. Pour déterminer la dimension de M_g, il faut d'abord munir cet espace d'une structure de variété complexe. Cette structure devrait au moins respecter la notion intuitive de distance entre deux surfaces de Riemann. Par exemple, il semble que deux tores $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ et $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau'\mathbb{Z})$ ne devraient être proches dans la topologie de M_1 que si

τ et τ' sont proches modulo le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. C'est ici qu'intervinrent Teichmüller et les applications quasiconformes. Si $f : R \to S$ est un homéomorphisme entre deux surfaces de Riemann tel que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est K-quasiconforme pour chaque paire de cartes locales, alors on dira que f est K-quasiconforme. Remarquons que si f est 1-quasiconforme, alors f est une transformation conforme. Déjà, cette remarque permet de définir une distance entre deux classes d'équivalence conforme de surfaces de Riemann $[R]$ et $[S]$ par

$$d([R],[S]) := \inf\{\log K : \text{il existe une application } K\text{-quasiconforme de } R \text{ sur } S\}.$$

La fonction $d([R],[S])$ ne dépend pas du choix des représentants R et S puisque la composée d'une transformation conforme avec une application K-quasiconforme demeure K-quasiconforme. Aussi, si $[R] = [S]$, il existe une transformation conforme, donc 1-quasiconforme, entre R et S, de sorte que $d([R],[S]) = \log 1 = 0$. La réciproque est moins triviale mais néanmoins vraie. Elle découle de l'existence d'applications extrémales atteignant l'infimum (Leh87, Theorem 2.1, p.183). L'égalité de symétrie $d([R],[S]) = d([S],[R])$ suit du fait que l'inverse d'une application K-quasiconforme est K-quasiconforme. Finalement, puisque la composition d'une application K_1-quasiconforme avec une application K_2-quasiconforme est K_1K_2-quasiconforme, d satisfait l'inégalité triangulaire.

Teichmüller observa qu'on obtenait un espace plus simple que M_g si on affaiblissait la relation d'équivalence par laquelle on quotiente l'espace des surfaces de Riemann de genre g. Nous nous abstiendrons de définir l'espace de Teichmüller T_g obtenu. L'important est de savoir que T_g peut être muni d'une structure de variété complexe analytique et qu'il peut être vu comme le revêtement universel de M_g et que la notion d'application quasiconforme y joue un rôle essentiel.

4.7.2 Espace de Teichmüller universel

Le plus simple des espaces de Teichmüller est l'espace de Teichmüller universel $T(1) = T(\mathbb{H})$. Le qualificatif d'*universel* donné par Bers réfère au fait qu'il contient les espaces de Teichmüller de toutes les surfaces de Riemann hyperboliques comme sous-variétés (Leh87, p.98). Il existe plusieurs modèles différents de l'espace $T(\mathbb{H})$. Nous présenterons brièvement les plus importants. Pour plus de détails et une liste assez complète de références, le lecteur pourra consulter l'article de synthèse (Sug07).

Modèle A (Applications quasiconformes)**.** Soit QC l'ensemble de tous les homéomorphismes quasiconformes de $\mathbb{H}$. Notons que tous les éléments de QC se prolongent en homéomorphismes de $\overline{\mathbb{H}}$ par le théorème de Carathéodory-Osgood 3.1 pour les applications quasiconformes. Si $f, g \in \mathrm{QC}$ et $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, alors $f^{-1} \circ h \circ g \in \mathrm{QC}$. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur QC par

$$f \sim g \iff \exists h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) : f^{-1} \circ h \circ g|_{\mathbb{R}} = \mathrm{Id}\,.$$

Le premier modèle de l'espace de Teichmüller universel est $\mathcal{QC} := \mathrm{QC}\,/\sim$.

Considérons maintenant QCN l'ensemble des homéomorphismes quasiconformes de $\mathbb{H}$ normalisés de sorte à fixer trois points donnés, par exemple -1, 0 et ∞. Disons que deux éléments de QCN sont équivalents lorsqu'ils coïncident au bord, c'est-à-dire sur $\overline{\mathbb{R}}$ et notons l'ensemble quotient par $\mathcal{QCN}$. Alors il est facile de voir que l'application de $\mathcal{QCN}$ vers $\mathcal{QC}$ donnée par $[f]_{\mathcal{QCN}} \mapsto [f]_{\mathcal{QC}}$ est une bijection.

L'avantage de l'ensemble $\mathcal{QCN}$ est qu'il porte une structure naturelle de groupe. En effet, si $[f], [g] \in \mathcal{QCN}$, alors la composition $[f] \circ [g] := [f \circ g]$ est bien définie et $\mathcal{QCN}$ forme un groupe sous cette opération.

On a montré au théorème 3.6 que la restriction à $\overline{\mathbb{R}}$ d'un élément de QC est un homéomorphisme quasimöbius. Réciproquement, par le théorème de Beurling et Ahlfors, ou plus exactement le théorème 3.17, tout homéomorphisme quasimöbius de $\overline{\mathbb{R}}$ est la restriction d'un élément de QC. Cette observation montre que l'ensemble $\mathcal{QC}$ est en bijection naturelle avec le modèle suivant par l'opération de restriction au bord.

Modèle B (Homéomorphismes quasimöbius)**.** Soit QM l'ensemble de tous les homéomorphismes quasimöbius de $\overline{\mathbb{R}}$. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur QM par

$$\varphi \sim \psi \iff \exists h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) : \varphi^{-1} \circ h \circ \psi = \mathrm{Id}\,.$$

Le quotient $\mathrm{QM}\,/\sim$ est noté $\mathcal{QM}$.

Comme précédemment, on voit que $\mathcal{QM}$ est en bijection naturelle avec $\mathcal{QSN}$, l'ensemble des homéomorphismes quasimöbius de $\overline{\mathbb{R}}$ fixant -1, 0 et ∞, c'est à dire l'ensemble des quasisymétries normalisées. L'extension de Beurling-Ahlfors permet de trouver un représentant dans $\mathcal{QCN}$ pour chaque élément de $\mathcal{QSN}$.

C'est la soudure conforme qui permet de faire le lien avec le dernier modèle que voici.

Modèle C (Quasidisques)**.** Soit Ω un quasidisque et trois points distincts z_1, z_2, z_3 marqués sur son bord dans le sens anti-horaire. Deux tels quasidisques marqués

$$\Omega(z_1, z_2, z_3) \quad \text{et} \quad \widetilde{\Omega}(w_1, w_2, w_3)$$

sont considérés comme équivalents si la transformation de Möbius qui envoie chaque z_k sur w_k envoie aussi Ω sur $\widetilde{\Omega}$. L'espace quotient est noté $\mathcal{QD}$.

Si $\Omega(z_1, z_2, z_3)$ est un quasidisque marqué et que $f : \mathbb{H} \to \Omega$ et $g : \mathbb{H}^* \to \Omega^*$ sont des transformations conformes envoyant -1, 0 et ∞ sur z_1,z_2 et z_3 respectivement, alors la restriction à $\overline{\mathbb{R}}$ de $f^{-1} \circ g$ est une quasisymétrie normalisée par le théorème 4.8. De plus, si $\Omega(z_1, z_2, z_3)$ est remplacé par $S(\Omega)(S(z_1), S(z_2), S(z_3))$ pour une transformation de Möbius S, alors la fonction soudante spéciale associée est la même. Par le théorème fondamental de la soudure conforme, cette application de $\mathcal{QD}$ dans $\mathcal{QSN}$ est une bijection.

Tous les espaces

$$\mathcal{QC}, \mathcal{QCN}, \mathcal{QM}, \mathcal{QSN}, \mathcal{QD}$$

modélisent l'espace de Teichmüller universel $T(\mathbb{H})$. Chaque modèle présente ses avantages (Leh87, Chapter III). Ce sont les outils que nous avons développés précédemment, comme l'extension de Beurling-Ahlfors et la soudure conforme, qui permettent de passer d'un modèle à l'autre.

L'espace de Teichmüller universel est fortement relié à l'espace $U(\mathbb{H})$ des dérivées Schwarziennes

$$S_f = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

des fonctions f analytiques et injectives sur $\mathbb{H}$. Il existe un plongement naturel, appelé plongement de Bers, envoyant $T(\mathbb{H})$ sur l'intérieur de $U(\mathbb{H})$ (Ahl63, Part II). Ce résultat est important en théorie géométrique des fonctions. Par exemple, il est lié au critère de Nehari à l'effet que si f est analytique dans $\mathbb{D}$ et

$$|S_f(z)|(1 - |z|^2)^2 \leq 2,$$

alors f est injective (Geh77). L'ouvrage (Leh87) est consacré aux relations existant entre les fonctions univalentes, c'est-à-dire analytiques et injectives, et les espaces de Teichmüller.

Récemment, la théorie de Teichmüller, en particulier l'espace de Teichmüller universel, a trouvé d'intéressantes applications en physique des particules (Pek95). En théorie des cordes, les particules élémentaires sont modélisées par des courbes lisses fermées vibrantes. La position d'une corde, lorsqu'elle varie dans le temps, génère une surface de Riemann dans l'espace-temps, appelée feuillet d'univers (Wil07). Une particule qui se scinde correspondrait à une corde qui se pince et se sépare en deux nouvelles cordes. L'effet inverse peut également se produire. Ces interactions influent sur la topologie du feuillet d'univers : des poignées s'ouvrent ou se referment selon les interactions. Pour une topologie fixée, la structure conforme du feuillet d'univers décrit certaines propriétés physiques et les spécialistes de la physique quantique doivent faire des calculs dans l'espace de Teichmüller de toutes les structures conformes possibles. L'espace de Teichmüller universel et la soudure conforme, telle qu'on l'a décrite au tout début de ce chapitre, jouent un rôle important dans le développement de cette théorie (RS06).

Conclusion

Comme Félix Klein l'a enseigné avec vision, l'étude de certains invariants permet souvent de mieux comprendre un objet mathématique donné. En choisissant des invariants appropriés, on a vu comment généraliser certains objets classiques de façon à conserver leurs propriétés agréables.

En effet, on a vu que le module des quadrilatères était un invariant conforme. Un homéomorphisme qui modifie cet invariant jusqu'à un certain facteur n'est plus conforme, mais *quasiconforme* par définition. On a vu que les applications quasiconformes se comportent en plusieurs points comme les transformations conformes. On a par exemple le théorème de Liouville et le théorème de Carathéodory-Osgood qui demeurent vrais pour les applications quasiconformes.

Un invariant très important pour les transformations de Möbius est le birapport. On a attribué le qualificatif *quasimöbius* aux fonctions qui ne changent le birapport que de façon bornée. On a ensuite vu que la restriction à la frontière d'un homéomorphisme quasiconforme du demi-plan supérieur était un homéomorphisme quasimöbius. Ceci découlait simplement du fait que le module d'un quadrilatère formé du demi-plan supérieur et de quatre points marqués sur sa frontière ne dépend que du birapport de ces quatre points et réciproquement. On a également démontré la réciproque, c'est-à-dire que tout homéomorphisme quasimöbius de $\overline{\mathbb{R}}$ est la restriction d'un homéomorphisme quasiconforme de $\mathbb{H}$, en utilisant l'extension de Beurling-Ahlfors.

Cela nous a permis par la suite de montrer que la fonction soudante associée à un quasidisque était un homéomorphisme quasimöbius. À l'aide du théorème d'existence de Morrey, on a aussi montré que tout homéomorphisme quasimöbius de $\overline{\mathbb{R}}$ est la fonction soudante d'un quasidisque. De plus, le quasidisque en question est unique à transformation de Möbius près parce que les quasicercles sont conformément effaçables. Ce dernier fait utilise entre autres la propriété remarquable que les applications quasiconformes préservent les ensembles d'aire nulle.

Finalement, on a vu que ces trois quasi-objets, les applications quasiconformes, les homéomorphismes quasimöbius et les quasidisques, fournissent des modèles équivalents pour l'espace de Teichmüller universel qui contient les espaces de Teichmüller de toutes les surfaces de Riemann hyperboliques, donc toutes les surfaces de Riemann sauf la sphère de Riemann, le plan complexe, le plan complexe privé d'un point et les tores.

La réalisation de ce mémoire a permis de constater, à la section 4.5.1, qu'il y avait vraisemblablement une erreur de raisonnement perpétuée par plusieurs auteurs dans la littérature au sujet de la soudure conforme. La question soulevée 4.20 semble très difficile à résoudre, que la réponse soit affirmative ou négative, mais néanmoins fondamentale.

Tel que remarqué à l'exemple 4.6.1, il semble que la courbure de $\partial\Omega$ en un point soit reliée à la distorsion locale de la fonction soudante φ au point correspondant. Ceci est également soulevé dans (SM04, pp.18-19). Cette relation, appuyée à l'aide d'exemples seulement, demeure mystérieuse.

Aussi, la relation qui existe entre les lemniscates polynômiales qui forment une courbe de Jordan et les produits de Blaschke, abordée à la section 4.6.2, a été découverte récemment. Dans l'article (EKS10), on conjecture qu'aux lemniscates rationnelles correspondraient des fonctions soudantes satisfaisant un certain type d'équation algébrique. Une des deux directions est d'ailleurs démontrée facilement.

Notons qu'il reste aujourd'hui des questions irrésolues sur les lemniscates polynômiales. Par exemple, il y a la conjecture de Erdös, Herzog et Piranian. Cette conjecture affirme que parmi les lemniscates de polynômes unitaires de degré n, celle du polynôme $z^n - 1$ a une longueur maximale. Une des dernières avancées sur ce problème utilise la théorie des applications quasiconformes (EH99). Peut-être que la soudure conforme pourrait permettre de progresser sur le sujet, en ramenant la question à un problème extrémal sur les produits de Blaschke.

Bibliographie

[AB60] L. V. Ahlfors et L. Bers : Riemann's mapping theorem for variable metrics. *Ann. of Math. (2)*, 72:385–404, 1960.

[Ahl63] L. V. Ahlfors : Quasiconformal reflections. *Acta Math.*, 109:291–301, 1963.

[Ahl73] L. V. Ahlfors : *Conformal invariants : topics in geometric function theory*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1973. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.

[Ahl78] L. V. Ahlfors : *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, troisième édition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.

[Ahl06] L. V. Ahlfors : *Lectures on quasiconformal mappings*, volume 38 de *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, deuxième édition, 2006. Avec chapitres supplémentaires par C. J. Earle, I. Kra, M. Shishikura et J. H. Hubbard.

[AIM09] K. Astala, T. Iwaniec et G. Martin : *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane*, volume 48 de *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, 2009.

[AJKS09] K. Astala, P. Jones, A. Kupiainen et E. Saksman : Random conformal weldings. 2009, arXiv/0909.1003.

[Ase02] V. V. Aseev : Quasi-symmetric embeddings. *J. Math. Sci. (New York)*, 108(3):375–410, 2002. Complex analysis and representation theory, 3.

[BA56] A. Beurling et L. Ahlfors : The boundary correspondence under quasiconformal mappings. *Acta Math.*, 96:125–142, 1956.

[Bea95] A. F. Beardon : *The geometry of discrete groups*, volume 91 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. Corrected reprint of the 1983 original.

[Bis90] C. J. Bishop : Conformal welding of rectifiable curves. *Math. Scand.*, 67(1): 61–72, 1990.

[Bis94] C. J. Bishop : Some homeomorphisms of the sphere conformal off a curve. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 19(2):323–338, 1994.

[Bis07] C. J. Bishop : Conformal welding and Koebe's theorem. *Ann. of Math. (2)*, 166(3):613–656, 2007.

[Cou36a] R. Courant : On the problem of Plateau. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 22(6):367–372, 1936.

[Cou36b] R. Courant : On the theory of conformal mapping. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 22(6):373–375, 1936.

[dFdM08] E. de Faria et W. de Melo : *Mathematical tools for one-dimensional dynamics*, volume 115 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[EH99] A. Eremenko et W. Hayman : On the length of lemniscates. *Michigan Math. J.*, 46(2):409–415, 1999.

[EKS10] P. Ebenfelti, D. Khavinson et H. S. Shapiro : Two-dimensional shapes and lemniscates. 2010, arXiv/1003.4567.

[Erk85] T. Erkama : Möbius automorphisms of plane domains. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 10:155–162, 1985.

[FM89] K. J. Falconer et D. T. Marsh : Classification of quasi-circles by Hausdorff dimension. *Nonlinearity*, 2(3):489–493, 1989.

[Geh77] F. W. Gehring : Univalent functions and the Schwarzian derivative. *Comment. Math. Helv.*, 52(4):561–572, 1977.

[Geh82] F. W. Gehring : *Characteristic properties of quasidisks*, volume 84 de *Séminaire de Mathématiques Supérieures*. Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1982.

[Geh99] F. W. Gehring : Characterizations of quasidisks. *Quasiconformal geometry and dynamics (Lublin, 1996)*, volume 48 de *Banach Center Publ.*, pages 11–41. Polish Acad. Sci., Varsovie, 1999.

[GL00] F. P. Gardiner et N. Lakic : *Quasiconformal Teichmüller theory*, volume 76 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[GM05] J. B. Garnett et D. E. Marshall : *Harmonic measure*, volume 2 de *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[Gol69] G. M. Goluzin : *Geometric theory of functions of a complex variable*. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 26. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.

[Ham02] D. H. Hamilton : Conformal welding. R. Kühnau (éditeur) : *Handbook of complex analysis : geometric function theory, Vol. 1*, pages 137–146. North-Holland, Amsterdam, 2002.

[Kel66] J. A. Kelingos : Boundary correspondence under quasiconformal mappings. *Michigan Math. J.*, 13:235–249, 1966.

[KNS90] Y. Katznelson, S. Nag et D. P. Sullivan : On conformal welding homeomorphisms associated to Jordan curves. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 15(2):293–306, 1990.

[Leh87] O. Lehto : *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Londres, Paris, Tokyo, 1987.

[LV73] O. Lehto et K. I. Virtanen : *Quasiconformal mappings in the plane*. Springer-Verlag, New York, deuxième édition, 1973. Traduit de l'Allemand par K. W. Lucas, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 126.

[MR07] D. E. Marshall et S. Rohde : Convergence of a variant of the zipper algorithm for conformal mapping. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45(6):2577–2609, 2007.

[MSW02] D. Mumford, C. Series et D. Wright : *Indra's pearls : The vision of Felix Klein*. Cambridge University Press, New York, 2002.

[Mun75] J. R. Munkres : *Topology : a first course*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[Nee97] T. Needham : *Visual complex analysis*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1997.

[Oik61] K. Oikawa : Welding of polygons and the type of Riemann surfaces. *Kōdai Math. Sem. Rep.*, 13:37–52, 1961.

[Osg03] W. F. Osgood : A Jordan curve of positive area. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 4(1):107–112, 1903.

[Pal91] B. P. Palka : *An introduction to complex function theory.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.

[Pek95] O. Pekonen : Universal teichmüller space in geometry and physics. *Journal of Geometry and Physics*, 15:227–251, 1995.

[Pfl60] A. Pfluger : Ueber die Konstruktion Riemannscher Flächen durch Verheftung. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 24:401–412 (1961), 1960.

[Pom92] Ch. Pommerenke : *Boundary Behavior of Conformal Maps*, volume 299 de *A Series of Comprehensive Studies in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Ran95] T. Ransford : *Potential theory in the complex plane*, volume 28 de *London Mathematical Society Student Texts.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[RS06] D. Radnell et E. Schippers : Quasisymmetric sewing in rigged Teichmüller space. *Commun. Contemp. Math.*, 8(4):481–534, 2006.

[Sag94] H. Sagan : *Space-filling curves.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 1994.

[Sch95] O. Schramm : Transboundary extremal length. *J. Anal. Math.*, 66:307–329, 1995.

[SM04] E. Sharon et D. Mumford : 2d-shape analysis using conformal mapping. *Computer Vision and Pattern Recognition, IEEE Computer Society Conference on*, 2:350–357, 2004.

[Ste05] K. Stephenson : *Introduction to circle packing.* Cambridge University Press, Cambridge, 2005. The theory of discrete analytic functions.

[Sug07] T. Sugawa : The universal Teichmüller space and related topics. *Quasiconformal mappings and their applications*, pages 261–289. Narosa, New Delhi, 2007.

[Vai85] J. V. Vainio : Conditions for the possibility of conformal sewing. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes*, (53):43, 1985.

[Väi85] J. Väisälä : Quasi-Möbius maps. *J. Analyse Math.*, 44:218–234, 1984/85.

[Weg99] E. Wegert : Nonlinear Riemann-Hilbert problems—history and perspectives. *Computational methods and function theory 1997 (Nicosia)*, volume 11 de *Ser. Approx. Decompos.*, pages 583–615. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1999.

[Wil07] G. B. WILLIAMS : Circle packings, quasiconformal mappings and applications. *Quasiconformal mappings and their applications*, pages 327–346. Narosa, New Delhi, 2007.