

TP-5

mardi 7 mars 2017 de 10h30 à 12h30

local Z-260, pavillon Claire-McNicol

Exercice 1. Soit Ω un sous-ensemble ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une suite croissante de compacts non vides K_k tel que $\Omega = \bigcup_{k \geq 1} K_k$ et, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $k \geq 1$ tel que $K \subset K_k$. (Indice. Lorsque $\partial\Omega \neq \emptyset$, prendre $\forall k \geq 1$, $K_k \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq k \text{ et } d_{\mathbb{C}\Omega}(x) \geq 1/k\}$.) $\square$

Corrigé de l'Exercice 1. (i) Si $\partial\Omega = \emptyset$, alors, comme Ω est ouvert, $\overline{\mathbb{C}\Omega} = \mathbb{C}\Omega$ et

$$\emptyset = \overline{\Omega} \cap \overline{\mathbb{C}\Omega} = \overline{\Omega} \cap \mathbb{C}\Omega \Rightarrow \Omega \subset \overline{\Omega} \subset \Omega \Rightarrow \Omega = \overline{\Omega}.$$

Ω est donc un sous-ensemble non-vide à la fois fermé et ouvert de l'espace connexe $\mathbb{R}^n$. Ce n'est possible que si $\Omega = \mathbb{R}^n$. Dans ce cas on prend la suite de compacts

$$\forall k \geq 1, \quad K_k \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq k\}$$

qui satisfait toutes les conditions.

(ii) Si $\partial\Omega \neq \emptyset$, alors $\overline{\Omega} \cap \overline{\mathbb{C}\Omega} \neq \emptyset$, $\mathbb{C}\Omega$ et Ω ne sont pas vides et $\mathbb{C}\Omega$ est fermé. La fonction distance $d_{\mathbb{C}\Omega}(x)$ de x à $\mathbb{C}\Omega$ est bien définie. On prend

$$\forall k \geq 1, \quad K_k \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq k \text{ et } d_{\mathbb{C}\Omega}(x) \geq 1/k\}.$$

Comme la norme et la fonction distance sont des fonctions continues, K_k est fermé. Par définition, K_k est contenu dans la boule compacte $\overline{B_k(0)}$ de $\mathbb{R}^n$. Les ensembles K_k sont donc compacts comme sous-ensembles fermés de compacts. Enfin, pour tout $k \geq 1$,

$$\forall x \in K_k, \quad d_{\mathbb{C}\Omega}(x) \geq 1/k > 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{C}\Omega \Rightarrow x \in \Omega \Rightarrow K_k \subset \Omega.$$

La suite est croissante. Soit $k' \geq k \geq 1$ et $x \in K_k$. Alors $\|x\| \leq k \leq k'$, $d_{\mathbb{C}\Omega}(x) \geq 1/k \geq 1/k'$ et $K_k \subset K_{k'}$.

Enfin, soit $K \subset \Omega$ un compact. Comme la norme et la fonction distance sont des fonctions continues sur le compact K :

$$\exists x_M \in K \text{ tel que } \|x_M\| = \sup_{x \in K} \|x\| \text{ et } \exists x_m \in K \text{ tel que } d_{\mathbb{C}\Omega}(x_m) = \inf_{x \in K} d_{\mathbb{C}\Omega}(x)$$

et, comme $x_m \in K \subset \Omega$, $d_{\mathbb{C}\Omega}(x_m) > 0$. Il suffit enfin de prendre un entier $k \geq \max\{1, \|x_M\|, 1/d_{\mathbb{C}\Omega}(x_m)\}$ ce qui entraîne $K \subset K_k$. $\square$

Exercice 2. Soit Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$ et

$$C(\Omega) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continue sur } \Omega\}$$

l'espace des fonctions continues sur Ω , où Ω n'est pas nécessairement borné. Soit $\{K_k\}$ la famille des sous-ensembles compacts construite dans l'Exercice 1 et pour tout $f \in C(\Omega)$ et $k \geq 1$ on pose

$$q_k(f) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sup_{x \in K_k} |f(x)|.$$

Montrer que la fonction

$$d(f, g) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{q_k(f - g)}{1 + q_k(f - g)}$$

est une métrique sur $C(\Omega)$. □

Corrigé de l'Exercice 2. On vérifie les trois propriétés d'une métrique. Pour (M1), si $f = g$, alors pour tout k , $q_k(f - g) = 0$ et $d(f, g) = 0$. Dans l'autre sens, $d(f, g) = 0$ entraîne $q_k(f) = \sup_{x \in K_k} |f(x)| = 0$ et $f = g$ sur $\cup_{k \geq 1} K_k = \Omega$. (M2) est vérifiée par définition. Pour (M3) il suffit de reprendre la démonstration de l'Exercice 10.3 (iv) du Chapitre 3. Par définition,

$$\begin{aligned} q_k(f - g) &= \sup_{x \in K_k} |f(x) - g(x)| \\ \frac{q_k(f - g)}{1 + q_k(f - g)} &= 1 - \frac{1}{1 + q_k(f - g)}. \end{aligned}$$

Maintenant, puisque $q_k(f - g) \leq q_k(f - h) + q_k(h - g)$, il vient

$$\begin{aligned} 1 + q_k(f - g) &\leq 1 + q_k(f - h) + q_k(h - g) \\ \frac{1}{1 + q_k(f - g)} &\geq \frac{1}{1 + q_k(f - h) + q_k(h - g)} \\ &\geq \frac{1}{1 + q_k(f - h) + q_k(h - g) + q_k(f - h) q_k(h - g)} \\ &= \frac{1}{(1 + q_k(f - h))(1 + q_k(h - g))}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{q_k(f - g)}{1 + q_k(f - g)} &= 1 - \frac{1}{1 + q_k(f - g)} \\ &\leq 1 - \frac{1}{(1 + q_k(f - h))(1 + q_k(h - g))} \\ &= \frac{q_k(f - h) + q_k(h - g) + q_k(f - h) q_k(h - g)}{(1 + q_k(f - h))(1 + q_k(h - g))} \\ &\leq \frac{q_k(f - h) + q_k(h - g) + 2 q_k(f - h) q_k(h - g)}{(1 + q_k(f - h))(1 + q_k(h - g))} \\ &= \frac{q_k(f - h)}{1 + q_k(f - h)} + \frac{q_k(h - g)}{1 + q_k(h - g)}. \end{aligned}$$

Finalement on somme des deux côtés

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{q_k(f-g)}{1+q_k(f-g)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{q_k(f-h)}{1+q_k(f-h)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{q_k(h-g)}{1+q_k(h-g)}$$

et $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$. $\square$

Exercice 3 (Arzelà-Ascoli). Soit (X, d) un espace métrique compact. On dénote par $C^0(X; \mathbb{R}^k) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R}^k \mid f \text{ continue sur } X \right\}$ l'espace complet pour $k \geq 1$ et la norme

$$(1) \quad \|f\|_{C^0} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{x \in X} \|f(x)\|, \quad \|y\| = \left(\sum_{i=1}^k |y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Démontrer les énoncés suivants.

- (i) Si S est un sous-ensemble compact de $C^0(X; \mathbb{R}^k)$, alors S est fermé,
 - (a) S est uniformément équicontinu et
 - (b) S est uniformément borné, c'est-à-dire,

$$\exists M > 0, \quad \forall f \in S, \forall x \in X, \|f(x)\| \leq M.$$

- (ii) Réciproquement, si S est un sous-ensemble de $C^0(X; \mathbb{R}^k)$ vérifiant (a) et (b), alors l'adhérence $\overline{S}$ de S est compacte dans $C^0(X; \mathbb{R}^k)$.

Corrigé de l'Exercice 3. (i) Si S est compact, il est fermé.

(a) (S est équicontinue). Pour $\varepsilon > 0$, la famille de boules ouvertes $\{B_\varepsilon(f) : f \in S\}$ est un recouvrement ouvert du compact S . Il existe donc $f_1, \dots, f_m \in S$ tel que

$$S \subset \cup_{i=1}^m B_\varepsilon(f_i).$$

Donc, pour tout $f \in S$, il existe i tel que

$$(2) \quad \sup_{x \in X} \|f(x) - f_i(x)\| < \varepsilon/3.$$

Comme les éléments f de $C^0(X; \mathbb{R}^k)$ sont uniformément continus,

$$\forall i, \exists \delta_i > 0, \forall x, y \in X, d(x, y) < \delta, \quad \|f_i(y) - f_i(x)\| < \varepsilon/3.$$

On prend $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\} > 0$ et $x, y \in X$ tel que $d(x, y) < \delta$

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\| &\leq \underbrace{\|f(y) - f_i(y)\|}_{\varepsilon/3} + \underbrace{\|f_i(y) - f_i(x)\|}_{\varepsilon/3} + \underbrace{\|f_i(x) - f(x)\|}_{\varepsilon/3} \\ &\Rightarrow \forall x, y \in X, d(x, y) < \delta, \forall f \in S, \quad \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

(b) Comme S est compact dans $C^0(X; \mathbb{R}^k)$, il est fermé et borné. Il existe donc

$M > 0$ tel que

$$\forall f \in S, \quad \sup_{x \in X} \|f(x)\| = \|f\|_{C^0} \leq M.$$

(ii) *On montre maintenant la réciproque.* Étant donné la famille S qui vérifie (a) et (b), il faut montrer la compacité séquentielle de $\overline{S}$: pour toute suite $\{f_n\} \subset S$, il existe $f \in \overline{S}$ et une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ tel que $f_{n_k} \rightarrow f$ dans $C^0(X; \mathbb{R}^k)$, c'est-à-dire, uniformément dans X .

Par uniforme équicontinuité de S ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n, \forall x, y \in X, d(y, x) < \delta, \quad \|f_n(x) - f_n(y)\| < \varepsilon/3.$$

Par compacité de X , il peut être couvert par un nombre fini de boules $B_\delta(x_j)$, $x_1, \dots, x_\ell \in X$. Comme, pour chaque j et n , la suite $\{f_n(x_j)\}$ est bornée, il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ que l'on écrira $\{f_n\}$ et il existe N tel que

$$\forall j, 1 \leq j \leq \ell, \forall n, m > N, \quad \|f_n(x_j) - f_m(x_j)\| < \varepsilon/3.$$

Cette sous-suite est Cauchy dans $C^0(X; \mathbb{R}^k)$. En effet, pour tout $x \in X$, il existe x_j tel que $d(x, x_j) < \delta$ et pour tous $m, n > N$

$$\begin{aligned} \|f_m(x) - f_n(x)\| &\leq \|f_m(x) - f_m(x_j)\| + \|f_m(x_j) - f_n(x_j)\| + \|f_n(x_j) - f_n(x)\| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme les fonctions de la sous-suite $\{f_n\}$ sont uniformément continues, il existe $f \in C^0(X; \mathbb{R}^k)$ tel que f_n converge uniformément vers f et ce f appartient à l'adhérence $\overline{S}$ de S . Donc, $\overline{S}$ est compact dans $C^0(X; \mathbb{R}^k)$. $\square$

Références

- [1] W. Rudin, *Principes d'analyse mathématique*, Édiscience, Paris 1995 et Dunod, Paris 2006 [traduction de l'anglais, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, New York, 1958, 1964, 1976.