Exercice 10.20

Démontrer que tout espace métrique compact K a une base dénombrable et qu'il est donc séparable. *Indication* : pour tout entier $n > 0$, il existe un nombre fini de boules ouvertes de rayon $1/n$ recouvrant K.

Solution. Si K ne possède qu'un nombre fini de points $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, ils sont isolés et l'on peut associer à chacun d'entre eux la boule ouverte de rayon

$$r_i \overset{\text{déf}}{=} \inf_{\substack{1 \leq j \leq \\ j \neq i}} d(x_j, x_i) > 0.$$

Si K possède un nombre de points infini, alors comme K est compact, il contient un point d'accumulation par le Théorème 7.3 du Chapitre 3 et on peut appliquer les résultats de l'Exercice 10.19. □

4 Exercices du Chapitre 4

Exercice 10.1

Soit $f : X \to Y$. Alors l'application induite $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ préserve les opérations élémentaires suivantes :

(1) $f^{-1}(\cup_\alpha B_\alpha) = \cup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$.

(2) $f^{-1}(\cap_\alpha B_\alpha) = \cap_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$.

(3) $f^{-1}(B_1 \backslash B_2) = f^{-1}(B_1) \backslash f^{-1}(B_2)$. □

Démonstration. (1) $B_\alpha \subset \cup_\alpha B_\alpha$ implies

$$f^{-1}(B_\alpha) \subset f^{-1}(\cup_\alpha B_\alpha) \quad \Rightarrow \cup_\alpha f^{-1}(B_\alpha) \subset f^{-1}(\cup_\alpha B_\alpha).$$

Si $x \in f^{-1}(\cup_\alpha B_\alpha)$, alors $f(x) \in \cup_\alpha B_\alpha$ et il existe α tel que $f(x) \in B_\alpha$. Donc, $x \in f^{-1}(B_\alpha)$ et $x \in \cup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$. Même type d'argument pour (2).

Pour (3), on peut faire le raisonnement suivant en utilisant (2) :

$$\begin{aligned} B_1 \backslash B_2 = B_1 \cap (Y \backslash B_1) \quad &\Rightarrow f^{-1}(B_1 \backslash B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(Y \backslash B_2) \\ f^{-1}(Y \backslash B_2) &= \{x \in X : f(x) \in Y \backslash B_2\} \\ &= \{x \in X : f(x) \notin B_2\} = \{x \in X : x \notin f^{-1}(B_2)\} \\ &= X \backslash f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1 \backslash B_2) &= f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(Y \backslash B_2) \\ &= f^{-1}(B_1) \cap (X \backslash f^{-1}(B_2)) = f^{-1}(B_1) \backslash f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

puisque $f^{-1}(B_1) \subset X$. □

Exercice 10.2

Soit $f : X \to Y$. Alors l'application induite $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ préserve les opérations suivantes :

(1) $f(\cup_\alpha B_\alpha) = \cup_\alpha f(B_\alpha)$.

(2) $f(\cap_\alpha B_\alpha) \subset \cap_\alpha f(B_\alpha)$. □

Démonstration. Même type d'argument que pour l'Exercice 10.1. □

Exercice 10.3

Soit $f : X \to Y$. Alors

(1) pour chaque $A \subset X$, $f^{-1}[f(A)] \supset A$.

(2) pour chaque $A \subset X$ et $B \subset Y$,

$$f\left[A \cap f^{-1}(B)\right] = f(A) \cap B \tag{4.1}$$

et, en particulier,

$$f\left[f^{-1}(B)\right] = f(X) \cap B. \tag{4.2}$$

Démonstration. (1) Par définition,

$$f^{-1}(f(A)) = \{x \in X : f(x) \in f(A)\} \supset \{x \in A : f(x) \in f(A)\} = A.$$

(2) Par définition,

$$\begin{aligned} &A \cap f^{-1}(B) = A \cap \{x \in X : f(x) \in B\} = \{x \in A : f(x) \in B\} \\ \Rightarrow\ &f(A \cap f^{-1}(B)) = \{f(x) : x \in A \text{ et } f(x) \in B\} = f(A) \cap B. \end{aligned}$$

Enfin, on applique la formule avec $A = X$. □

Exercice 10.4

Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$. Alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. Comme chaque application inverse induite est bien définie

$$f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X) \quad \text{et} \quad g^{-1} : \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Y),$$

la composition $g^{-1} \circ f^{-1} : \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(X)$ est bien définie. De même la composition des applications induites est bien définie

$$f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y) \quad \text{et} \quad g : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(Z) \quad \Rightarrow\ f \circ g : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Z).$$

Pour $C \in \mathcal{P}(Z)$

$$\begin{aligned} (g \circ f)^{-1}(C) &= \{x \in X : g(f(x)) \in C\} \\ &= \{x \in X : f(x)) \in g^{-1}(C)\} \\ &= f^{-1}(g^{-1}(C)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(C)). \end{aligned}$$

Donc $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

Exercice 10.5

(i) Soit un ensemble arbitraire X et soit $\{A_\alpha\}$ un recouvrement de X par des sous-ensembles de X.

(ii) Soit Y un autre ensemble et une famille $f_\alpha : A_\alpha \to Y$ d'applications tel que

$$\forall \alpha, \beta, \quad f_\alpha|_{A_\alpha \cap A_\beta} = f_\beta|_{A_\alpha \cap A_\beta}.$$

Alors, il existe une application unique $f : X \to Y$ qui est un prolongement de chaque f_α :

$$\forall \alpha, \quad f|_{A_\alpha} = f_\alpha.$$

Démonstration. Soit $x \in X$. Comme $\{A_\alpha\}$ est un recouvrement de X, on pose

$$f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f_\alpha(x)$$

pour un α tel que $x \in A_\alpha$. La fonction f est bien définie car s'il existe un $\beta \neq \alpha$ tel que $x \in A_\beta$, alors, par hypothèse, $f(x) = f_\alpha(x) = f_\beta(x)$. L'application f est unique car s'il y en avait une seconde f', on aurait

$$f'|_{A_\alpha} = f_\alpha = f|_{A_\alpha} \quad \Rightarrow f' = f \text{ sur } X = \cup A_\alpha.$$

□

Exercice 10.6

Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ tel que $g \circ f = I_X$ où I_X est la fonction identité sur X. Alors f est injective et g est surjective.

Démonstration. L'application f est injective puisque, pour tous $x, x' \in X$,

$$f(x) = f(x') \quad \Rightarrow x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'.$$

L'application g est surjective puisque, pour tout $z \in X$,

$$z = g(f(z)),$$

c-à-d., il existe $f(z) \in Y$ tel que $z = g(f(z))$. □

Exercice 10.7

Soit $f : (X, d_X) \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que

$$f^{-1}\{0\} \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in X : f(x) = 0\} \tag{4.3}$$

est fermé dans (X, d).

Démonstration. Comme l'ensemble $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$, son image inverse pour une fonction continue est fermée par le Théorème 3.3. □

Exercice 10.8

Soient $f, g : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ deux applications continues entre deux espaces métriques et E un sous-ensemble dense dans (X, d). Montrer que

(i) $f(E)$ est dense dans $(f(X), d_Y)$;

(ii) $f = g$ sur E entraîne $f = g$ sur X.

Démonstration. (i) De la Définition 6.6 du Chapitre 3, $E \subset X$ est dense dans X si tout point de X est un point d'adhérence de E (ou encore $\overline{E} = X$). Par le Théorème 3.3 du Chapitre 4, pour une fonction continue on a

$$f(E) \subset f(X) = f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}.$$

Comme $\overline{f(E)}$ est fermé, $\overline{f(X)} = \overline{f(E)}$ et $f(E)$ est dense dans $f(X)$.

(ii) Soit $x \in X$. Par densité de E dans X, il existe une suite $\{x_n\}$ dans E qui d_X-converge vers x. Par continuité de f, $f(x_n) \to f(x)$ dans (Y, d_Y). Comme $f = g$ sur E, $g(x_n) = f(x_n)$ et, par continuité de g, $g(x_n) \to g(x)$. Par unicité de la limite dans (Y, d_Y), $f(x) = g(x)$. □

Exercice 10.9

(i) On se donne la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$$

Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^2$ et n'est pas continue en $(0,0)$, mais que sa restriction à toute droite passant par $(0,0)$ est continue.

(ii) On se donne la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$g(x,y) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{xy^2}{x^2+y^6}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$$

Montrer que g n'est bornée sur aucun voisinage de $(0,0)$ et n'est pas continue en $(0,0)$, mais que sa restriction à toute droite passant par $(0,0)$ est continue.

Démonstration. (i) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$0 \leq (x \pm y^2)^2 = x^2 + y^4 \pm 2\,x\,y^2 \quad \Rightarrow \mp \frac{xy^2}{x^2+y^4} \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \left| \frac{xy^2}{x^2+y^4} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Comme $f(0,0) = 0$, on a $|f(x,y)| \leq 1/2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Si l'on se donne la droite $D = \{t\,(v,w) : t \in \mathbb{R}$ passant par $(0,0)$ de direction (v,w), on a pour $t \neq 0$

$$f(tv,tw) - f(0,0) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{(tv)\,(tw)^2}{(tv)^2 + (tw)^4}, & \text{si } (v,w) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (v,w) = (0,0) \end{array} \right\}$$
$$= t \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{v\,w^2}{v^2 + t^2\,w^4}, & \text{si } (v,w) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (v,w) = (0,0) \end{array} \right\}.$$

Si $w = 0$ ou $v = 0$, cette différence est 0, $f(tv,tw) = f(0,0)$ et pour toute suite $t_n \to 0$, $t_n \neq 0$, $f(t_n v, t_n w) \to f(0,0)$. Si $v \neq 0$ et $w \neq 0$, alors

$$t\,\frac{v\,w^2}{v^2 + t^2\,w^4} \to 0\,\frac{w^2}{v} = 0.$$

On a donc bien la continuité en $(0,0)$ le long de droites passant par $(0,0)$.

Pour montrer que f est discontinue en $(0,0)$, on suit le chemin $x = y^2$ ce qui donne

$$f(y^2,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{y^4}{y^4 + y^4} = \dfrac{1}{2}, & \text{si } y \neq 0 \\ 0, & \text{si } y = 0 \end{array} \right\}.$$

Donc, pour la suite $(x_n, y_n) = (1/n^2, 1/n) \to (0,0)$,

$$f(1/n^2, 1/n)) = \frac{1}{2} \not\to 0 = f(0,0).$$

(ii) Pour montrer que que f n'est pas continue en $(0,0)$, on suit le chemin $x = y^2$ ce qui donne

$$g(y^2,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{y^4}{y^4 + y^6} = \dfrac{1}{1+y^2}, & \text{si } y \neq 0 \\ 0, & \text{si } y = 0 \end{array} \right\}$$
$$\Rightarrow\; g(y^2,y) \to 1 \neq 0 = f(0,0) \text{ lorsque } y \to 0.$$

Pour la bornitude, on prend le chemin $x = y^3$ ce qui donne

$$g(y^3,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{y^5}{y^6 + y^6} = \dfrac{1}{2\,y}, & \text{si } y \neq 0 \\ 0, & \text{si } y = 0 \end{array} \right\}$$
$$\Rightarrow\; g((1/n)^3, 1/n) = \frac{n}{2} \to +\infty \neq 0 = f(0,0) \text{ lorsque } n \to \infty.$$

g n'est donc bornée dans aucun voisinage de $(0,0)$.

Enfin le long de la droite $D = \{t\,(v,w) : t \in \mathbb{R}$ passant par $(0,0)$ de direction (v,w), on a pour $t \neq 0$

$$\begin{aligned} g(tv,tw) - g(0,0) &= \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{tv\,(tw)^2}{(tv)^2 + (tw)^6}, & \text{si } (v,w) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (v,w) = (0,0) \end{array} \right\} \\ &= t \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{v\,w^2}{v^2 + t^4\,w^6}, & \text{si } (v,w) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (v,w) = (0,0) \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

En examinant chaque cas, il vient $g(tv,tw) \to g(0,0)$ lorsque $t \to 0$, $t \neq 0$. □

Exercice 10.10

Démontrer que l'on peut remplacer la définition de la continuité uniforme sur X par : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall E \subset X \text{ tel que } \operatorname{diam}(E) < \delta, \quad \operatorname{diam} f(E) < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Démonstration. De la Définition 6.1, une fonction $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ entre deux espaces métriques est *uniformément continue* sur X si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, x' \in X \text{ pour lesquels } d_X(x', x) < \delta, \quad d_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon.$$

Pour tout $E \subset X$ tel que $\operatorname{diam}(E) < \delta$, on a, par définition du diamètre,

$$\begin{gathered} \operatorname{diam}(E) = \sup\{d_X(x', x) : x,\, x' \in E\} < \delta \quad \Rightarrow \forall x,\, x' \in E,\, d_X(x, x') < \delta \\ \Rightarrow\; d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon \quad \Rightarrow\; \operatorname{diam} f(E) = \sup\{d_Y(f(x'), f(x)) : x,\, x' \in E\} < \varepsilon. \end{gathered}$$

Dans l'autre sens, on part de (4.4). On a

$$X = \cup_{x \in X} B_{\delta/2}(x) \text{ et } \operatorname{diam} B_{\delta/2}(x) < \delta.$$

Donc

$$\begin{gathered} \forall x' \in X \text{ tel que } d_X(x', x) < \delta/2, \quad \operatorname{diam} f(E) < \varepsilon \\ \Rightarrow\; d_Y(f(x'), f(x)) \leq \operatorname{diam} f(E) < \varepsilon. \end{gathered}$$

Mais ceci est vrai pour tout $x \in X$:

$$\forall x,\, \forall x' \in X \text{ tel que } d_X(x', x) < \delta/2, \quad d_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon$$

et f est uniformément continue sur X. □

Exercice 10.11

Démontrer.

(i) La composition $g \circ f$ de deux fonctions $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ uniformément continue sur $E \subset X$ et $g : (Y, d_Y) \to (Z, d_Z)$ uniformément continue sur $f(E) \subset Y$ est uniformément continue sur X

(ii) La composition $g \circ f$ de deux fonctions $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ lipschitzienne en $x \in X$ et $g : (Y, d_Y) \to (Z, d_Z)$ lipschitzienne en $f(x) \in Y$ est lipschitzienne en $x \in X$.

Démonstration. (i) Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall y, y' \in f(E),\, d_Y(y, y') < \eta, \quad d_Z(g(y), g(y')) < \varepsilon$$

et il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, x' \in E,\, d_X(x, x') < \delta, \quad d_Y(f(x), f(x')) < \eta \quad \Rightarrow d_Z(g(f(x)), g(f(x'))) < \varepsilon.$$

(ii) Par définition, il existe $c(f(x))$ et $r(f(x)) > 0$ tel que

$$\forall y,_1 y_2 \in B_{r(f(x))}(f(x)), \quad d_Z(g(y_1), g(y_2)) \leq c(f(x))\, d_Y(y_1, y_2)$$

et il existe $c(x)$ et $r(x) > 0$ tel que

$$\forall x_1, x_2 \in B_{r(x)}(x), \quad d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq c(x)\, d_X(x_1, x_2).$$

On réduit le rayon de $B_{r(x)}(x) \subset X$ pour que son image tombe dans la boule $B_{r(f(x))}(f(x)) \subset Y$. On choisit le rayon $\rho(x) = \min\{r(x), r(f(x))/c(x)\}$

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in B_{\rho(x)}(x), \quad d_Y(f(x_i), f(x)) &\leq c(x)\, d_X(x_i, x) \\ &< \min\{r(x)\, c(x), r(f(x))\} \leq r(f(x)) \\ \Rightarrow\ f(x_i) \in B_{r(f(x))}(f(x)), &\quad i = 1, 2 \\ \Rightarrow\ d_Z(g(f(x_1)), g(f(x_2))) &\leq c(f(x))\, d_Y(f(x_1), f(x_2)). \\ \Rightarrow\ d_Z(g(f(x_1)), g(f(x_2))) \leq c(f(x))\, d_Y(f(x_1), f(x_2)) &\leq c(f(x))\, c(x)\, d_X(x_1, x_2) \end{aligned}$$

et $g \circ f$ est lipschitzienne en x pour la boule $B_{\rho(x)}(x)$ et la constante $c(f(x))\, c(x)$. □

Exercice 10.12

On dit qu'une application $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est *ouverte* si l'image $f(O)$ de tout ouvert O dans X est ouverte dans Y. Montrer qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et ouverte est monotone.

Démonstration. On montre d'abord que f est injective. Soit x_1 et x_2 tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Supposons sans perte de généralité que $x_1 < x_2$. Comme $[x_1, x_2]$ est compact et que f est continue

$$\exists a \in [x_1, x_2] \text{ tel que } f(a) = \inf f([x_1, x_2])$$
$$\exists b \in [x_1, x_2] \text{ tel que } f(b) = \sup f([x_1, x_2]).$$

Si $f(a) < f(x_1)$, alors $x_1 < a < x_2$ et $f(a) \in f((x_1, x_2))$. Comme f est ouverte, l'image $f((x_1, x_2))$ est ouverte et il existe $r > 0$ tel que $B_r(f(a)) \subset f((x_1, x_2))$ ce qui signifierait qu'il existe $z \in (x_1, x_2)$ tel que $f(z) = f(a) - r/2$ ce qui contredirait la minimalité de $f(a)$. Donc $f(x_1) = f(a)$. Par le même argument appliqué au sup, il vient $f(x_1) = f(b)$. La fonction f est donc constante et égale à $f(x_1)$ sur l'intervalle (x_1, x_2). Mais ceci contredit le fait que f est ouverte car $f((x_1, x_2)) = \{f(x_1)\}$ serait fermée. f est donc injective.

Soit $x_1 < x_2$. Comme f est injective $f(x_1) \neq f(x_2)$. Supposons que $f(x_1) < f(x_2)$. Il reste à démontrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$. On démontre d'abord que f est strictement croissante sur $[x_1, x_2]$. Par le raisonnement pécédent on a

$$f(x_1) = \inf f([x_1, x_2]) \quad \text{et} \quad f(x_2) = \sup f([x_1, x_2]).$$

Il reste à démontrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$. Soient deux points x, y tel que $x_1 \leq x < y \leq x_2$. On veut démontrer que $f(x) < f(y)$. Par injectivité de f, $f(x) \neq f(y)$. Supposons que $f(x) > f(y)$. Par injectivité de f, ceci implique que $f(x_1) < f(y) < f(x) < f(x_2)$ et $x_1 < x < y < x_2$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z \in (y, x_2)$ tel que $f(z) = f(x)$ ce qui contredit le fait que f est injective.

Si que $f(x) < f(x_1) < f(x_2)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z \in (x, x_2)$ tel que $f(z) = f(x_1)$ ce qui contredit le fait que f est injective.

Si que $f(x_1) < f(x_2) < f(x)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z \in (x_1, x)$ tel que $f(z) = f(x_2)$ ce qui contredit le fait que f est injective. Donc,

$$x_1 < x < x_2 \quad \Rightarrow f(x_1) < f(x) < f(x_2).$$

Il reste deux autres cas : $x < x_1 < x_2$ et $x_1 < x_2 < x$. Dans le premier cas, si $f(x) > f(x_1)$, alors $f(x_2) > f(x) > f(x_1)$ ou $f(x) > f(x_2) > f(x_1)$:

$$\begin{aligned} f(x_2) > f(x) > f(x_1) \quad &\Rightarrow \exists z \in (x_1, x_2) \text{ tel que } f(z) = f(x) \\ f(x) > f(x_2) > f(x_1) \quad &\Rightarrow \exists z \in (x, x_1) \text{ tel que } f(z) = f(x_2) \end{aligned}$$

Ce qui contredit l'injectivité de f dans les deux cas. Donc

$$x < x_1 < x_2 \quad \Rightarrow f(x) < f(x_1) < f(x_2).$$

De la même façon, on montre que

$$x_1 < x_2 < x \quad \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) < f(x).$$

Pour compléter la démonstration, il reste à démontrer que pour tout $x < y$, on a $f(x) < f(y)$ en considérant trois cas :

$$x < y < x_1, \quad x < x_1 < y, \quad x_1 < x < y.$$

On obtient le résultat par l'absurde en faisant appel au théorème des valeurs intermédiaires.

□

Exercice 10.13

Soient deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) et leur produit

$$X \times Y \stackrel{\text{déf}}{=} \{(x, y) : x \in X \text{ et } y \in Y\}. \tag{4.5}$$

(i) Montrer que

$$\begin{aligned}&((x, y), (x', y')) \mapsto d_{X\times Y}((x, y), (x', y')) \stackrel{\text{déf}}{=} d_X(x, x') + d_Y(y, y') \\ &: (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}_+\end{aligned} \tag{4.6}$$

définit une métrique sur $X \times Y$.

(ii) Montrer que la *projection* sur X

$$(x, y) \mapsto p_X(x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} x : (X \times Y, d_{X\times Y}) \to (X, d_X)$$

est lipschitzienne sur $X \times Y$.

Démonstration. (i) Voir l'Exercice 10.4 du Chapitre 3.

(ii) En effet,

$$\begin{aligned}&d_X(p_X(x, y), p_X(x', y')) \\ &= d_X(x, x') \le d_X(x, x') + d_Y(y, y') = d_{X\times Y}((x, y), (x', y')).\end{aligned}$$

La projection est donc lipschitzienne de constante 1. □

Exercice 10.14

On dénote par $d_n(y, x) = \|y - x\|_{\mathbb{R}^n}$ la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$ un entier. Soit le pole nord $p = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ de la sphère de rayon un

$$S^{(2)} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{x = (x_1, x_2, x_3) : \|x\|_{\mathbb{R}^3} \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1\right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

(i) Montrer que l'application

$$x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \varphi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}\right) : S^{(2)}\backslash\{p\} \to \mathbb{R}^2 \tag{4.7}$$

est une bijection et donner l'expression de l'application inverse φ^{-1}.

(ii) Montrer que $\varphi : (S^{(2)}\backslash\{p\}, d_3) \to (\mathbb{R}^2, d_2)$ est un homéomorphisme. (*On peut supposer que toute fonction polynômiale est continue et utiliser les théorèmes sur le produit et le quotient d'applications continues.*)

(iii) Montrer que la fonction

$$(x, y) \mapsto \rho(x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} d_3(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \tag{4.8}$$

est une métrique sur $\mathbb{R}^2$.

(iv) Montrer que l'application $\varphi : (S^{(2)}\backslash\{p\}, d_3) \to (\mathbb{R}^2, \rho)$ est une isométrie et donc une isométrie de $(S^{(2)}\backslash\{p\}, d_3)$ dans le complété $(\widehat{\mathbb{R}^2}, \hat{\rho})$ de $(\mathbb{R}^2, \rho)$.

(v) Montrer que le complété $(\widehat{\mathbb{R}^2}, \hat{\rho})$ de $(\mathbb{R}^2, \rho)$ est compact.

Solution. (i) En effet, φ est injective car pour $\varphi(x) = \varphi(x')$ tel que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 = (x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2$, on a

$$\frac{x_1}{1-x_3} = \frac{x_1'}{1-x_3'} \quad \text{et} \quad \frac{x_2}{1-x_3} = \frac{x_2'}{1-x_3'} \tag{4.9}$$

$$\frac{1-x_3^2}{(1-x_3)^2} = \left(\frac{x_1}{1-x_3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{1-x_3}\right)^2 = \left(\frac{x_1'}{1-x_3'}\right)^2 + \left(\frac{x_2'}{1-x_3'}\right)^2 = \frac{1-(x_3')^2}{(1-x_3')^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1+x_3}{1-x_3} = \frac{1-x_3^2}{(1-x_3)^2} = \frac{1-(x_3')^2}{(1-x_3')^2} = \frac{1+x_3'}{1-x_3'}$$

$$\Rightarrow (1+x_3)\,(1-x_3') = (1+x_3')\,(1-x_3) \tag{4.10}$$

$$\Rightarrow 1 + x_3 - x_3' - x_3\,x_3' = 1 + x_3' - x_3 - x_3\,x_3' \quad \Rightarrow x_3' = x_3.$$

Enfin, de (4.9), il vient $x_2' = x_2$ et $x_1' = x_1$.

L'application φ est aussi surjective. Soit $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $x = (x_1, x_2, x_3)$ tel que

$$\frac{x_1}{1-x_3} = y_1 \quad \frac{x_2}{1-x_3} = y_2 \quad \text{et} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

$$\frac{1+x_3}{1-x_3} = \frac{1-x_3^2}{(1-x_3)^2} = \left(\frac{x_1}{1-x_3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{1-x_3}\right)^2 = y_1^2 + y_2^2$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{y_1^2 + y_2^2 - 1}{y_1^2 + y_2^2 + 1} \quad \text{et} \quad 1 - x_3 = \frac{2}{y_1^2 + y_2^2 + 1}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2\,y_1}{y_1^2 + y_2^2 + 1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2\,y_2}{y_1^2 + y_2^2 + 1}.$$

On remarque aussi que $x = (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,1) = p$ puisque cela donnerait $y_1 = y_2 = 0$ et la contradiction $-1 = +1$.

La fonction inverse est donc

$$\begin{aligned} &(y_1, y_2) \mapsto \varphi^{-1}(y_1, y_2) = \left(\frac{2\,y_1}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, \frac{2\,y_2}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, \frac{y_1^2 + y_2^2 - 1}{y_1^2 + y_2^2 + 1}\right) \\ &: (\mathbb{R}^2, d_2) \to (S^{(2)}\backslash\{p\}, d_3) \end{aligned} \tag{4.11}$$

(ii) Les applications φ et φ^{-1} sont continues comme quotients de polynômes puisque les dénominateurs sont différents de 0 : φ est donc un homéomorphisme.

(iii) On vérifie les trois axiomes d'une métrique. Pour (M1), si $x = y$, alors $\rho(x, y) = d_3(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) = 0$. Réciproquement, si $\rho(x, y) = 0$, on a $(\varphi^{-1}(x) = \varphi^{-1}(y)$ et $x = y$. Pour (M2), comme d_3 est une métrique,

$$\rho(x, y) = d_3(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) = d_3(\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(x)) = \rho(y, x).$$

Pour (M3) et x, y, z

$$\begin{aligned} d_3(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(z)) &\leq d_3(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) + d_3(\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(z)) \\ &\Rightarrow \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z). \end{aligned}$$

(iv) Avec la nouvelle métrique, la fonction $\varphi : (S^{(2)}\backslash\{p\}, d_3) \to (\mathbb{R}^2, \rho)$ est toujours une bijection. Par définition, ρ, il vient pour tout x, y dans $(S^{(2)}\backslash\{p\}$

$$\rho(\varphi(x), \varphi(x)) = d_3(\varphi^{-1}(\varphi(x)), \varphi^{-1}(\varphi(y))) = d_3(x,y)$$

ce qui caractérise bien une isométrie.

Soit $(\widehat{\mathbb{R}^2}, \hat{\rho})$ le complété de $(\mathbb{R}^2, \rho)$ et $i : (\mathbb{R}^2, \rho) \to (\widehat{\mathbb{R}^2}, \hat{\rho})$ l'injection isométrique dense de $(\mathbb{R}^2, \rho)$ dans $(\widehat{\mathbb{R}^2}, \hat{\rho})$ (cf. Théorème 6.5 du Chapitre 3). La composition $i \circ \varphi$

$$(S^{(2)}\backslash\{p\}, d_3) \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{R}^2, \rho) \xrightarrow{i} (\widehat{\mathbb{R}^2}, \hat{\rho})$$

est donc aussi une isométrie qui possède un prolongement uniformément continu $\widehat{\varphi}$ à l'adhérence $\overline{(S^{(2)}\backslash\{p\}, d_3)}$ qui est égale à $S^{(2)}$ (Théorème 6.3 du Chapitre 4).

Soit $j : (S^{(2)}\backslash\{p\}, d_3) \to (S^{(2)}, d_3)$ l'injection de $(S^{(2)}\backslash\{p\}, d_3)$ dans son adhérence $\overline{(S^{(2)}\backslash\{p\}, d_3)}$ qui est égale à $S^{(2)}$. La composition $j \circ \varphi^{-1}$

$$(\mathbb{R}^2, \rho) \xrightarrow{\varphi^{-1}} (S^{(2)}\backslash\{p\}, d_3) \xrightarrow{j} S^{(2)}$$

est donc aussi une isométrie qui possède un prolongement uniformément continu $\widehat{\psi}$ au complété $(\widehat{\mathbb{R}^2}, \hat{\rho})$ (Théorème 6.3 du Chapitre 4).

Les compositions $\widehat{\varphi} \circ \widehat{\psi} : (\widehat{\mathbb{R}^2}, \hat{\rho}) \to (\widehat{\mathbb{R}^2}, \hat{\rho})$ et $\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi} : S^{(2)} \to S^{(2)}$ coincïdent avec l'identité sur les sous-ensembles denses $\mathbb{R}^2$ et $S^{(2)}\backslash\{p\}$. Par l'Exercice 10.8, elles sont donc égales à l'identité et $\widehat{\varphi}$ est une bijection. Son inverse et elle sont uniformément continues. En fait, comme $\hat{\rho}(x,y) = \rho(x,y) = d_3(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y))$, sur $\mathbb{R}^2$, il vient $\hat{\rho}(x,y) = d_3(\widehat{\varphi}^{-1}(x), \widehat{\varphi}^{-1}(y))$ par densité et $\widehat{\varphi}$ est une isométrie.

(v) Comme $\hat{\varphi} : S^{(2)} \to (\widehat{\mathbb{R}^2}, \hat{\rho})$ est un homéomorphisme, elle est continue. Enfin, comme la sphère $S^{(2)}$ est compacte dans $(\mathbb{R}^3, d_3)$, son image par $\hat{\varphi}$:

$$\widehat{\mathbb{R}^2} = \widehat{\varphi}(S^{(2)})$$

est compacte dans $(\widehat{\mathbb{R}^2}, \hat{\rho})$ (cf. Théorème 4.1 du Chapitre 4). □

5 Exercices du Chapitre 5

Exercice 8.1

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions dans $C^0(K)$, $K \subset \mathbb{R}^n$ compact. Montrer que si $\{f_n\}$ est *uniformément équicontinue* et que pour chaque $x \in K$, la suite $\{f_n(x)\}$ dans $\mathbb{R}$ converge vers une fonction $f : K \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) \to f(x),$$