# Annexe A. Corrigés des exercices

## 1 Exercices du Chapitre 1

### Exercice 5.1

Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $r + s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $rs \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\, i \cup \{0\}$.

*Solution.* (i) (addition.) Par l'absurde. On suppose que $r + s \in \mathbb{Q}$. Ce qui donne $s = (r + s) - r \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit le fait que $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(ii) (produit.) Si $r = 0$, alors $rs = 0$. Si $0 \neq r \in \mathbb{Q}$, alors

$$s = \frac{r\,s}{r} \in \mathbb{Q}$$

comme quotient de deux rationnels ce qui contredit le fait que $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. □

### Exercice 5.2

Soit $A$, $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ et

$$-A \stackrel{\text{déf}}{=} \{-a : a \in A\}\,.$$

Montrer que $\inf A = -\sup(-A)$.

*Solution.* Soit $b_0 = \inf A$. Par définition de l'infimum, $b_0$ est une borne inférieure de $A$ et

$$\forall a \in A, \quad b_0 \leq a \quad \Rightarrow \forall a \in A, \quad -a \leq -b_0$$

et $-b_0$ est une borne supérieure de $-A$. Donc $c^0 = \sup(-A) \in \mathbb{R}$ et $c^0 \leq -b_0$. Ceci entraîne

$$\begin{aligned} &\forall a \in A, \quad -a \leq c^0 \leq -b_0 \\ \Rightarrow\ &\forall a \in A, \quad b_0 \leq -c^0 \leq a \end{aligned}$$

et $-c^0$ est une borne inférieure de $A$. Mais comme $b_0$ est la plus grande borne supéreure de $A$, on a $b_0 \geq -c^0$ et finalement $b_0 = -c^0$. Par définition de $b_0$ et $c^0$,

$$\inf A = b_0 = -c^0 = -\sup(-A).$$

□

## 2 Exercices du Chapitre 2

### Exercice 5.1

Montrer qu'il est impossible de définir sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ un *ordre total* qui lui confère une structure de corps ordonné. (*Indication* : $-1$ est un carré.

*Solution.* S'il y a un ordre total sur $\mathbb{C}$ qui en fasse un corps ordonné, alors de la Proposition 3.4 (d), on a $1 > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 0$, on a $x^2 > 0$. Comme $i \neq 0$ on a ou bien $i > 0$ ou $-i > 0$ ce qui donne $-1 = i^2 > 0$ et $-1 = (-i)^2 > 0$. On obtient donc une contradiction dans chaque cas. □

### Exercice 5.2

Démontrer les résultats suivants.

(i) L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable.

(ii) Le segment $]a, b[$ et le segment $]c, d[$ ont le même cardinal.

(iii) Le segment $]0, 1[$ et $\mathbb{R}$ ont le même cardinal.

*Démonstration.* (i) On a déjà démontré que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (Théorème 2.5 du Chapitre 2) et que $\mathbb{Q}$ est dénombrable (Exemple 2.3). On peut partionner $\mathbb{R}$ en deux ensembles disjoints

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \quad \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \varnothing.$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, il existe une bijection $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. Si $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ était dénombrable, alord il existerait une bijection $g : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$. Ceci nous permettrait de construire la bijection suivante

$$x \mapsto F(x) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{matrix} (0, f(x)), & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ (1, g(x)), & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{matrix} \right\} : \mathbb{R} \to \{0, 1\} \times \mathbb{N}$$

$$(i, y) \mapsto F^{-1}(i, y) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{matrix} f^{-1}(y), & \text{si } i = 0 \\ g^{-1}(y)), & \text{si } i = 1 \end{matrix} \right\} : \{0, 1\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}\,.$$

Comme $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$ est dénombrable en tant que sous-ensemble infini de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (cf. Théorème 2.3), on en concluerait que $\mathbb{R}$ est dénpmbrable ce qui contredit le fait qu'il ne l'est pas. Donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable.

(ii) Il suffit de prendre un polynôme de degré un de la forme $f(x) = \alpha\, x + \beta$ et d'imposer les conditions suivantes en $f(a) = c$ et $f(b) = d$ pour déterminer les deux constantes :

$$\alpha\, a + \beta = c \quad \text{et} \quad \alpha\, b + \beta = d \quad \Rightarrow\ f(x) = c + \frac{d - c}{b - a}\,(x - a)$$
$$\Rightarrow\ f^{-1}(y) = a + \frac{b - a}{d - c}\,(y - c).$$

Comme $f$ est une bijection entre $]a, b[$ et $]c, d[$, les deux intervalles ont le même cardinal.

(iii) On choisit la bijection

$$f(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\left[1 + \frac{x}{1 + |x|}\right] : \mathbb{R} \to ]0, 1[ \quad \text{d'inverse} \quad f^{-1}(y) = \frac{2y - 1}{1 - |2y - 1|}.$$

□