

Nombres parfaits

Christian Côté

$$2 \cdot (2^2 - 1) = 2 \cdot 3 = 6 = 1 + 2 + 3$$

$$2^2 (2^3 - 1) = 4 \cdot 7 = 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

$$2^4 (2^5 - 1) = 16 \cdot 31 = 496$$

$$2^6 (2^7 - 1) = 64 \cdot 127 = 8128$$

Théorème

n est un nombre parfait pair $\Leftrightarrow n = 2^{p-1} (2^p - 1)$ où $2^p - 1$ est premier.

Nombre de Mersenne

Mn	p	M_p	Valeur de M_p en base 10	Nombre de chiffres en base 10	Date de découverte	Découvreur(s)
M1	2	M_2	3	1	Antiquité	remarqué (en tant que nombre premier) par les mathématiciens grecs
M2	3	M_3	7	1		
M3	5	M_5	31	2		
M4	7	M_7	127	3		
M5	13	M_{13}	8 191	4	Moyen Âge (xiii ^e siècle)	Ibn Fallus (1194-1239)
M6	17	M_{17}	131 071	6	1588	Cataldi
M7	19	M_{19}	524 287	6	1588	Cataldi
M8	31	M_{31}	2 147 483 647	10	1750	Euler
M9	61	M_{61}	2 305 843 009 213 693 951	19	1883	Pervushin
M10	89	M_{89}	618970019...449562111	27	1911	Powers (en)
M11	107	M_{107}	162259276...010288127	33	1914	Powers ¹²
M12	127	M_{127}	170141183...884105727	39	1876	Lucas

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$$

M13	521	M ₅₂₁	686479766...115057151	157	30 janvier 1952	Robinson (SWAC (en))
M14	607	M ₆₀₇	531137992...031728127	183	30 janvier 1952	Robinson (SWAC)
M15	1 279	M ₁₂₇₉	104079321...168729087	386	25 juin 1952	Robinson (SWAC)
M16	2 203	M ₂₂₀₃	147597991...697771007	664	7 octobre 1952	Robinson (SWAC)
M17	2 281	M ₂₂₈₁	446087557...132836351	687	9 octobre 1952	Robinson (SWAC)
M18	3 217	M ₃₂₁₇	259117086...909315071	969	8 septembre 1957	Riesel (BESK (en))
M19	4 253	M ₄₂₅₃	190797007...350484991	1 281	3 novembre 1961	Hurwitz (IBM)
M20	4 423	M ₄₄₂₃	285542542...608580607	1 332	3 novembre 1961	Hurwitz (IBM)
M21	9 689	M ₉₆₈₉	478220278...225754111	2 917	11 mai 1963	Gillies (en) (ILLIAC II)
M22	9 941	M ₉₉₄₁	346088282...789463551	2 993	16 mai 1963	Gillies (ILLIAC II)
M23	11 213	M ₁₁₂₁₃	281411201...696392191	3 376	2 juin 1963	Gillies (ILLIAC II)
M24	19 937	M ₁₉₉₃₇	431542479...968041471	6 002	4 mars 1971	Tuckerman (en) (IBM)
M25	21 701	M ₂₁₇₀₁	448679166...511882751	6 533	30 octobre 1978	Noll (en) et Nickel (CDC)
M26	23 209	M ₂₃₂₀₉	402874115...779264511	6 987	9 février 1979	Noll (CDC)
M27	44 497	M ₄₄₄₉₇	854509824...011228671	13 395	8 avril 1979	Nelson (en) et Slowinski (en) (Cray Research)
M28	86 243	M ₈₆₂₄₃	536927995...433438207	25 962	25 septembre 1982	Slowinski (Cray)
M29	110 503	M ₁₁₀₅₀₃	521928313...465515007	33 265	28 janvier 1988	Colquitt et Welsh (NEC)
M30	132 049	M ₁₃₂₀₄₉	512740276...730061311	39 751	19 septembre 1983	Slowinski (Cray)
M31	216 091	M ₂₁₆₀₉₁	746093103...815528447	65 050	1 ^{er} septembre 1985	Slowinski (Cray)
M32	756 839	M ₇₅₆₈₃₉	174135906...544677887	227 832	19 février 1992	Slowinski et Gage
M33	859 433	M ₈₅₉₄₃₃	129498125...500142591	258 716	10 janvier 1994	Slowinski et Gage
M34	1 257 787	M ₁₂₅₇₇₈₇	412245773...089366527	378 632	3 septembre 1996	Slowinski et Gage



M35	1 398 269	M ₁₃₉₈₂₆₉	814717564...451315711	420 921	13 novembre 1996	GIMPS / Joel Armengaud
M36	2 976 221	M ₂₉₇₆₂₂₁	623340076...729201151	895 932	24 août 1997	GIMPS / Gordon Spence
M37	3 021 377	M ₃₀₂₁₃₇₇	127411683...024694271	909 526	27 janvier 1998	GIMPS / Roland Clarkson
M38	6 972 593	M ₆₉₇₂₅₉₃	437075744...924193791	2 098 960	1 ^{er} juin 1999	GIMPS / Nayan Hajratwala
M39	13 466 917	M ₁₃₄₆₆₉₁₇	924947738...256259071	4 053 946	14 novembre 2001	GIMPS / Michael Cameron
M40 ¹⁴	20 996 011	M ₂₀₉₉₆₀₁₁	125976895...855682047	6 320 430	17 novembre 2003	GIMPS / Michael Shafer
M41 ¹⁵	24 036 583	M ₂₄₀₃₆₅₈₃	299410429...733969407	7 235 733	15 mai 2004	GIMPS / Josh Findley
M42 ¹⁶	25 964 951	M ₂₅₉₆₄₉₅₁	122164630...577077247	7 816 230	18 février 2005 ¹⁷	GIMPS / Martin Nowak
M43 ¹⁸	30 402 457	M ₃₀₄₀₂₄₅₇	315416475...652943871	9 152 052	15 décembre 2005	GIMPS / Cooper et Boone
M44 ¹⁹	32 582 657	M ₃₂₅₈₂₆₅₇	124575026...053967871	9 808 358	4 septembre 2006	GIMPS / Cooper et Boone
M45 ²⁰	37 156 667	M ₃₇₁₅₆₆₆₇	202254405...308220927	11 185 272	6 septembre 2008	GIMPS / Elvenich
M46 ²¹	42 643 801	M ₄₂₆₄₃₈₀₁	169873516...562314751	12 837 064	12 avril 2009	GIMPS / Odd Magnar Strindmo
M47 ²²	43 112 609	M ₄₃₁₁₂₆₀₉	316470269...697152511	12 978 189	23 août 2008	GIMPS / Smith
M48	57 885 161	M ₅₇₈₈₅₁₆₁	581887266...724285951	17 425 170	25 janvier 2013	GIMPS / Cooper
M49 [?] ¹	74 207 281	M ₇₄₂₀₇₂₈₁	300376418...086436351	22 338 618	7 janvier 2016	GIMPS / Cooper
M50 [?] ⁰	77 232 917	M ₇₇₂₃₂₉₁₇	467333183...762179071	23 249 425	3 janvier 2018	GIMPS / Jonathan Pace
M51 [?] ²³	82 589 933	M ₈₂₅₈₉₉₃₃	148894445...217902591	24 862 048	7 décembre 2018	GIMPS / Patrick Laroche
M52 [?] ⁰	136 279 841	M _{136 279 841}	881694327...486871551	41 024 320	12 octobre 2024	GIMPS / Luke Durant

?

Personne ne sait s'il existe
un nombre parfait impair!

$$> 10^{1500}$$

Théorème

n est un nombre parfait pair $\Leftrightarrow n = 2^{p-1} (2^p - 1)$ où $2^p - 1$ est premier.

$\sigma(n)$ = somme de tous les diviseurs de n

$$\sigma(24) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 24 = 60$$

$$\sigma(p) = 1 + p \iff p \text{ est premier}$$

$$\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \cdot 28$$

Définition : Un nombre n est dit parfait si $\sigma(n) = 2n$.

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r} \text{ et } m \mid n \Rightarrow m = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_r^{m_r} \text{ où } 0 \leq m_i \leq n_i$$

$$n = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad m = 12 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0$$

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \sum_{m \mid n} m = \sum_{0 \leq m_i \leq n_i} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_r^{m_r} \\ &= \left(1 + p_1 + \dots + p_1^{n_1}\right) \left(1 + p_2 + \dots + p_2^{n_2}\right) \cdots \left(1 + p_r + \dots + p_r^{n_r}\right) \\ &= \left(\frac{1 - p_1^{n_1+1}}{1 - p_1}\right) \left(\frac{1 - p_2^{n_2+1}}{1 - p_2}\right) \cdots \left(\frac{1 - p_r^{n_r+1}}{1 - p_r}\right) \end{aligned}$$

$$\text{pgcd}(m, n) = 1 \Rightarrow \sigma(m \cdot n) = \sigma(m)\sigma(n)$$

Théorème

n est un nombre parfait pair $\Leftrightarrow n = 2^{p-1} (2^p - 1)$ où $2^p - 1$ est premier.

Preuve

$$(\Leftarrow) (\text{Euclide}) \quad \sigma(n) = \left(\frac{1-2^p}{1-2} \right) ((2^p - 1) + 1) = (2^p - 1) 2^p = 2 (2^{p-1} (2^p - 1)) = 2n$$

Théorème

n est un nombre parfait pair $\Leftrightarrow n = 2^{p-1} (2^p - 1)$ où $2^p - 1$ est premier.

Preuve

$(\Rightarrow)$ (Euler) $n = 2^a b$ où $\text{pgcd}(2, b) = 1$

$$2^{a+1} b = 2n = \sigma(n) = \sigma(2^a) \sigma(b) = (2^{a+1} - 1) \sigma(b)$$

$$\Rightarrow \sigma(b) = \frac{2^{a+1} b}{2^{a+1} - 1} = b + \frac{b}{2^{a+1} - 1} = b + c$$

$$2^{a+1} - 1 \mid b \Rightarrow b = (2^{a+1} - 1)c$$

$c \neq 1 \Rightarrow \sigma(b) = b + 1 + c + \dots > b + c = \sigma(b)$, ce qui est une contradiction

Donc $c = 1 \Rightarrow b = 2^{a+1} - 1$ qui est premier car $\sigma(b) = b + 1$.