Exemple 4.4. Continuons l'exemple précédent. Maintenant on travaille sur les quaternions et on a alors les décompositions

$$\mathbb{H}Q = \mathbb{H}e_1 \oplus \mathbb{H}e_2 \oplus \mathbb{H}e_3 \oplus \mathbb{H}e_4 \oplus \mathbb{H}Q \cdot e_5$$

comme anneaux (avec centre $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_4 \oplus \mathbb{R}e_5$), et

$$\mathbb{H}Q = \mathbb{H}e_1 \oplus \mathbb{H}e_2 \oplus \mathbb{H}e_3 \oplus \mathbb{H}e_4 \oplus \mathbb{H}Q \cdot e_6 \oplus \mathbb{H}Q \cdot e_7$$

comme $\mathbb{H}Q$-modules à gauches. Mais les deux derniers modules ne sont pas simples. Posons

$$\begin{aligned} e_8 &:= \frac{1}{8}\sum_{q\in Q} q[q] = \frac{1}{8}\left(([1]-[-1]+i[i]-i[-i]+j[j]-j[-j]+k[k]-k[-k])\right); \\ e_9 &:= \frac{1}{8}\left(([1]-[-1]+i[i]-i[-i]-j[j]+j[-j]-k[k]+k[-k])\right); \\ e_{10} &:= \frac{1}{8}\left(([1]-[-1]-i[i]+i[-i]-j[j]+j[-j]+k[k]-k[-k])\right); \\ e_{11} &:= \frac{1}{8}\left(([1]-[-1]-i[i]+i[-i]+j[j]-j[-j]-k[k]+k[-k])\right). \end{aligned}$$

On a $e_6 = e_8 + e_9; e_7 = e_{10} + e_{11}$ et

$$\mathbb{H}Q = \mathbb{H}e_1 \oplus \mathbb{H}e_2 \oplus \mathbb{H}e_3 \oplus \mathbb{H}e_4 \oplus \mathbb{H}e_8 \oplus \mathbb{H}e_9 \oplus \mathbb{H}e_{10} \oplus \mathbb{H}e_{11},$$

On a pour chaque $q \in Q$ que

$$[q]e_8 = \frac{1}{8}\sum_{r\in Q} r[qr] = \frac{1}{8}\sum_{q\in Q} q^{-1}r[q] = q^{-1}e_8$$

et il suit facilement que $e_8e_i = e_ie_8 = 0$, pour $i = 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11$, $e_8^2 = e_8$ et $\mathbb{H}Q \cdot e_8 = \mathbb{H}e_8$. Aussi par un calcul direct

$$e_9 = ie_8[i]; e_{10} = je_8[j]; e_{11} = ke_8[k]; e_8[-1] = -e_8.$$

Les $\mathbb{H}Q$-modules $\mathbb{H}e_8$, $\mathbb{H}e_9$, $\mathbb{H}e_{10}$ et $\mathbb{H}e_{11}$ sont isomorphes (par exemple: $\mathbb{H}e_9 \simeq \mathbb{H}e_8 : he_9 = hie_8[i] \mapsto hie_8$). Donc on a cinq $\mathbb{H}Q$-modules simples à isomorphisme près, chacun de dimension 1 sur $\mathbb{H}$.

Soit $V_5 := \mathbb{H}$ le $\mathbb{H}Q$-module à gauche défini par

$$\sum_{q\in Q} h_q[q] \cdot h' := \sum_{q\in Q} h_q h' q^{-1} \ (h_q, h' \in \mathbb{H}).$$

Alors $e_8 \cdot 1 = 1$, $e_9 \cdot i = ie_8[i] \cdot i = ie_8 \cdot i(i)^{-1} = ie_8 \cdot 1 = i$, $e_{10} \cdot j = j$, $e_{11} \cdot k = k$. $\mathbb{H}Qe_8 \simeq V_5 : re_8 \mapsto r \cdot 1$, $\mathbb{R} = \mathrm{End}_{\mathbb{H}Q}(V_5)$ et $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V_5)$ est de dimension 16 sur $\mathbb{R}$, isomorphe à $\mathbb{H}Q \cdot e_5$.

5. Le théorème de Wedderburn

Dans cette section on montre que si $|G| \in k^\times$ alors l'anneau de groupe kG est isomorphe comme anneau à un produit d'anneaux de la forme $\mathrm{End}_H(V)$, où V est un espace vectoriel sur un corps gauche H. Premièrement nous allons étudier un peu ces anneaux d'endomorphismes.

5.1. **Anneaux d'endomorphismes d'un espace vectoriel.** Fixons un corps gauche H et un espace vectoriel V sur H de dimension n. Fixons aussi une base $e_1, \ldots, e_n$ de V. L'ensemble $\mathrm{End}_H(V)$ des endomorphismes H-linéaires de V est un anneau, avec la composition comme multiplication.

Si $c \in C(H)$ (le centre de H), et $\eta \in \mathrm{End}_H(V)$ alors $c\eta$, définie par

$$c\eta(v) = c \cdot \eta(v) = \eta(c \cdot v),$$

est aussi dans $\mathrm{End}_H(V)$, et donc $\mathrm{End}_H(V)$ est d'une façon naturelle un espace vectoriel sur le corps $C(H)$. Pour un $h \in H$ nous définissons $h * \eta$ par

$$(h * \eta)(\sum_{i=1}^n h_i e_i) := \eta(\sum_{i=1}^n h_i h e_i) = \sum_{i=1}^n h_i h \eta(e_i).$$

Cette définition dépend fortement du choix de base, mais pour $c \in C(H)$ on a $c\eta = c * \eta$. On voit que $h * \eta \in \mathrm{End}_H(V)$,

$$h_1 * h_2 * \eta = (h_1 h_2) * \eta, h * (\eta_1 + \eta_2) = h * (\eta_1) + h * (\eta_2), \mathbf{1}_H * \eta = \eta,$$

pour $h, h_1, h_2 \in H$ et $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \mathrm{End}_H(V)$. Ainsi $\mathrm{End}_H(V)$ est un espace vectoriel sur H.

Considérons pour chaque $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ l'endomorphisme explicite $E_{ij} \in \mathrm{End}_H(V)$ défini par

$$E_{ij}(\sum_r h_r e_r) := h_j e_i.$$

Pour $\eta \in \mathrm{End}_H(V)$ définissons la matrice de scalaires $[\eta]_{ij} \in H$ par

$$\eta(e_j) = \sum_{i=1}^n [\eta]_{ij} e_i.$$

Lemme 5.1. *(i) Les E_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, forment une base pour $\mathrm{End}_H(V)$ comme espace vectoriel sur H. En particulier*

$$\eta = \sum_{ij} [\eta]_{ij} * E_{ij}.$$

(ii) Pour $h, h' \in H$ on a

$$(h * E_{ij})(h' * E_{rs}) = \begin{cases} (h'h) * E_{is} & si\ j = r, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

(iii) $\mathbf{1} = E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{nn}$ est l'identité de $\mathrm{End}_H(V)$ et

$$(h * \mathbf{1})(h' * \mathbf{1}) = (h'h) * \mathbf{1},$$

alors l'application $H \longrightarrow \mathrm{End}_H(V) : h \mapsto h * \mathbf{1}$ est un anti-homomorphisme d'anneau.

Preuve. (i) On comparant pour $v = \sum_j h_j e_j$ les deux calculs

$$\eta(v) = \sum_j h_j \eta(e_j) = \sum_{i,j} h_j [\eta]_{ij} e_i$$

et

$$\begin{aligned} \left[\sum_{ij} [\eta]_{ij} * E_{ij}\right](v) &= \sum_{ij} E_{ij}\left(\sum_r h_r [\eta]_{ij} e_r\right) \\ &= \sum_{ij} h_j [\eta]_{ij} e_i \end{aligned}$$

on obtient $\eta = \sum_{ij} [\eta]_{ij} * E_{ij}$. Si $\sum_{ij} h_{ij} * E_{ij} = 0$, alors pour chaque r

$$0 = \sum_{ij} h_{ij} * E_{ij}(e_r) = \sum_{ij} E_{ij}(h_{ij} e_r) = \sum_i h_{ir} e_i,$$

donc $h_{ir} = 0$ pour chaque i et r. Donc les E_{ij} font une base sur H.

(ii) et (iii) suivent des calculs directs. □

On utilise le lemme dans la preuve de la proposition suivante.

Proposition 5.1. *Soit H un corps gauche et V un H-espace vectoriel de dimension $1 \leq n < \infty$.*

(i) Le centre de $\mathrm{End}_H(V)$ *est isomorphe au centre de H*

$$C\left(\mathrm{End}_H(V)\right) = \{c \cdot \mathbf{1}_V;\ c \in C(H)\}.$$

(ii) $\mathrm{End}_H(V)$ *est un anneau simple, c.-à-d., l'anneau n'a pas d'idéal non-trivial.*

(iii) V est le seul $\mathrm{End}_H(V)$*-module à gauche simple, à isomorphisme près.*

Preuve. (i) Soit $\eta \in \mathrm{End}_H(V)$ dans le centre. Alors pour chaque r on a $E_{rr}\eta = \eta E_{rr}$ et $E_{1r}\eta = \eta E_{1r}$ et donc par le lemme

$$\sum_j [\eta]_{rj} * E_{rj} = \sum_i [\eta]_{ir} E_{ir}, \sum_j [\eta]_{rj} E_{1j} = \sum_i [\eta]_{i1} E_{ir},$$

et donc $[eta]_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $[\eta]_{jj} = [\eta]_{11}$, donc $\eta = h * (E_{11} + \ldots + E_{nn} = h * \mathbf{1}$, pour $h \in \mathbb{H}$. On a aussi $\eta(h' * \mathbf{1}) = (h'\mathbf{1})\eta$, donc $hh' = h'h$ pour chaque $h' \in H$, et donc h est dans le centre de H. Par contre si $\eta = c * \mathbf{1}$, alors pour chaque endomorphism η' et $v \in V$ on a

$$(\eta\eta')(v) = (c * \mathbf{1})(\eta')(v) = (c\mathbf{1})(\eta'(v)) = \eta'(cv) = \eta'\eta(v),$$

et donc η est dans le centre.

(ii) Soit I un idéal non-zéro de A et $\eta \in I$ un élément non-zéro. Alors il existe un coefficient $[\eta]_{ij} \neq 0$. I est un idéal, alors

$$\sum_r E_{ri}\eta E_{jr} = [\eta]_{ij} * \sum_r E_{rr} = [\eta]_{ij} * \mathbf{1} \in I,$$

et aussi

$$\mathbf{1} = ([\eta]_{ij}^{-1}) * \mathbf{1})[\eta]_{ij} * \mathbf{1} \in I.$$

Alors $I = \mathrm{End}_H(V)$. Donc $\mathrm{End}_H(V)$ est simple.

(iii) Premièrement on montre que V est simple. Soit $0 \neq U \subseteq V$ un sous-module, et $u = \sum_i h_i e_i \in U$ un élément non-zéro, disons $h_i \neq 0$. Alors $(h_i^{-1}) * E_{1i}(u) = e_1 \in U$. Alors aussi $\sum_j h_j * E_{j1}(e_1) = \sum_j h_j e_j \in U$, donc $U = V$.

Soit J l'annulateur J de $e_1 \in V$ dans $\mathrm{End}_H(V)$. Alors l'application $\eta \mapsto \eta(e_1)$ de $\mathrm{End}_H(V)$ dans V implique un isomorphisme de $\mathrm{End}_H(V)$-modules à gauche $\mathrm{End}_H(V)/J \simeq V$.

Posons $E = E_{11}$ et $E' = E_{22} + E_{33} + \ldots + E_{nn}$. Donc

$$E^2 = E, (E')^2 = E', EE' = E'E = 0, E + E' = \mathbf{1}.$$

Soit $\eta(e_1) = 0$, alors η est dans

$$0 = \eta(e_1) = \sum_{ij} [\eta]_{ij} * E_{ij}(e_1) = \sum_{ij} E_{ij}([\eta]_{ij} e_1) = \sum_i [\eta]_{i1} e_i,$$

donc $[\eta]_{i1} = 0$ pour chaque i. On a

$$\eta E' = \sum_{i \geq 1, j > 1} [\eta]_{ij} * E_{ij} \sum_{r > 1} E_{rr} = \sum_{i \geq 1, j > 1} [\eta]_{ij} * E_{ij} = \eta.$$

Soit M maintenant un $\mathrm{End}_H(V)$-module à gauche simple, en particulier $M \neq 0$. On a que $\mathrm{End}_H(V) EM \subseteq M$ est un sous module, donc $EM = 0$ ou $\mathrm{End}_H(V) EM = M$, par la simplicité de M. Supposons que $EM = 0$. Alors pour chaque i, j on a

$$E_{ij} M = E_{i1} E E_{1j} M = 0,$$

alors

$$M = \mathbf{1} M = (\sum_i E_{ii}) M = \sum_i E_{ii} M = 0.$$

Une contradiction, donc il existe un $m' \in M$, tel que $m := Em' \neq 0$. Alors $Em = E^2 m' = Em' = m$ et $m = \mathbf{1} m = (E + E')m = Em + E'm = m + E'm$, donc $E'm = 0$. Soit $\eta \in J$, alors $\eta = \eta E'$ et donc

$$\eta m = \eta E' m = 0$$

et J est contenu dans l'annulateur de $m \in M$ dans $\mathrm{End}_H V$. Par le théorème fondamental des homomorphismes, l'homomorphisme de modules

$$\mathrm{End}_H(V) \longrightarrow M : \eta \mapsto \eta(m)$$

induit un homomorphisme non-zero

$$V \simeq \mathrm{End}_H(V)/J \longrightarrow M.$$

V et M étant simple, il suit que V et M sont isomorphes, par les mêmes arguments comme dans le lemme de Schur. $\square$

5.2. **Wedderburn.** Soit G un groupe fini et $|G| \in k^\times$, où k est un corps gauche. Le centre de k est noté C. Nous savons maintenant qu'il existe un nombre fini s de classes d'isomorphisme de kG-modules simples. Soient $V_1, \ldots, V_s$ ces kG-modules simples (à isomorphisme près). À chaque V_i il y a une représentation associée $\rho_i : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_i)$ et par extension un homomorphisme d'anneau $\rho_i : kG \longrightarrow \operatorname{End} V_i$. Par le lemme de Schur $H_i := \operatorname{End}_{kG}(V_i)$ est un corps gauche contenant C.

On peut considérer V_i alternativement comme kG-module, et comme espace vectoriel sur le corps gauche H_i. Si $r \in kG$, $h \in H_i$ et $v \in V_i$, alors par la définition de H_i on a $h(rv) = rh(v) = \rho_i(r)(h(v))$, donc $\rho_i(r) \in \operatorname{End}_{H_i} V_i$. Donc on obtient même un homomorphisme d'anneau

$$\rho_i : kG \longrightarrow \operatorname{End}_{H_i}(V_i) : \sum_g a_g[g] \mapsto \sum_g a_g \rho_i(g).$$

Le théorème de Wedderburn implique que c'est un épimorphisme, donc chaque H_i-endomorphisme de V_i est de la forme $\sum_g a_g \rho_i(g)$, où les $a_g \in k$. On montre même plus.

Théorème 5.1 (Wedderburn)**.** *On suppose $|G| \in k^\times$, k un corps gauche, et soient $V_1, \ldots, V_s$ les kG-modules simples (à isomorphisme près). On supposera que la dimension de k comme un espace vectoriel sur son centre est de dimension finie.*

L'application

$$(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s) : \ kG \longrightarrow \operatorname{End}_{H_1}(V_1) \oplus \operatorname{End}_{H_2}(V_2) \oplus \ldots \oplus \operatorname{End}_{H_s}(V_s)$$

est un isomorphisme d'anneau.

En particulier, kG est la somme directe d'un certain nombre d'algèbres de matrices sur des corps gauches variables, chacun simple.

Preuve. Nous allons montrer que les deux côtés ont la même dimension comme espaces vectoriels sur le centre C de k. Dans lemme 5.1 on a montré que $\operatorname{End}_{H_i}(V_i)$ est un espace vectoriel sur H_i de dimension $(\dim_{H_i} V_i)^2$, et comme C-espace la dimension est

$$(\dim_{H_i} V_i)^2 \cdot \dim_C H_i = \frac{(\dim_C V_i)^2}{\dim_C H_i}.$$

Par th. 4.4 les dimensions des deux C-espaces de l'homomorphisme $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s)$ sont égales ! Pour montrer le théorème de Wedderburn il suffit donc de montrer que l'application est injective.

Soit $r \in kG$ dans le noyau de $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s)$, donc r est dans le noyau de chaque ρ_i. Alors r agit trivialement dans chaque kG-module simple, donc par le théorème de Maschke r agit trivialement dans chaque kG-module. En particulier, r agit trivialement sur kG, donc

$$r \cdot [\mathbf{1}_G] = 0.$$

Mais $r \cdot [\mathbf{1}_G] = r$, donc $r = 0$ et le noyau est trivial et l'application est injective. □

Ce théorème dit qu'on peut voir l'anneau kG d'une autre manière totalement différente. Certains propriétés de kG on voit plus facilement si on utilise l'isomorphisme de Wedderburn. L'anneau $\operatorname{End}_{H_i}(V_i)$ est unitaire avec unité $E_i = \mathbf{1}_{V_i}$. Le système d'éléments $E_1, \ldots, E_s$ jouent un rôle important dans l'anneau à droite, disons A, dans l'isomorphisme de Wedderburn. Les propriétés sont

$$E_i^2 = E_i; E_i E_j = 0 (i \neq j); \mathbf{1} = E_1 + \ldots + E_s;$$

les E_i sont dans le centre de A; chaque idéal de A est engendré par un unique $E_J := \sum_{j\in J} E_j$, $J \subseteq \{1,2,\ldots,s\}$, en particulier A contient 2^s idéaux; chaque sous-anneau AE_i est simple; pour chaque A-module à gauche M on a une décomposition

$$M = E_1M \oplus E_2M \oplus \ldots \oplus E_sM$$

comme A-modules; les V_i sont les seuls A-modules simples; $E_iV_j = 0$ si $i \neq j$; E_i agit comme l'identité sur V_i; chaque élément du centre de A s'écrit uniquement comme $\sum_{i=1}^s c_iE_i$, où $c_i \in C(H_i)$.

Toutes ces propriétés sont facile à montrer en utilisant prop.5.1.

Par l'isomorphisme du théorème de Wedderburn il existe un système d'éléments $e_1,\ldots,e_s$ dans kG ayant exactement les mêmes propriétés ! Tous ces éléments sont dans le centre de kG. On va d'abord considérer le centre de l'anneau kG.

5.3. **Classes de conjugaison et centre de kG.** Il y a une description directe du centre de l'anneau kG, si G est fini. Soit $C \subset G$ une classe de conjugaison, donc

$$C = \{gxg^{-1}; g \in G\},$$

où $x \in C$ quelconque. On définit sa fonction caractéristique δ_C (ou $[C]$) par

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

ou

$$[C] := \sum_{x\in C} [x] \in kG.$$

En particulier, si $c \in C(G)$ (=le centre du groupe), alors $C = \{c\}$ est une classe de conjugaison. On verra que les $[C]$'s donnent une base du centre de kG comme espace vectoriel sur le centre $C(k)$ de k.

Si on considère kG comme un ensemble de fonctions sur G avec la convolution comme produit, alors le centre de kG s'identifie à la collection des *fonctions centrales*

$$\{f : G \longrightarrow k; \forall x, g \in G : f(xg) = f(gx), f(G) \subseteq C(k)\}.$$

Par exemple, si $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est une représentation de dimension finie sur un corps k, la fonction $\chi : G \longrightarrow k : \chi(g) := \mathrm{tr}(\rho(g))$ est une fonction centrale, dite le *caractère* de V.

Proposition 5.2. *Soit G un groupe fini, et k un corps gauche avec centre $C(k)$.*

(i) Si C est une classe de conjugaison, alors $[C]$ est dans le centre de kG.

(ii) Si $C_1,\ldots,C_c$ sont les classes de conjugaison de G, alors $\{[C_1],[C_2],\ldots,[C_c]\}$ est une $C(k)$-base du centre de kG.

Preuve. Pour chaque $g \in G$ on a

$$[g][C] = \sum_{x\in C}[gx] = \sum_{x\in C}[gxg^{-1}][g] = [C][g],$$

donc $[C]$ commute avec les éléments de base de kG, et commute même avec tous les éléments de kG; ou $[C]$ est dans le centre de kG.

Si $C_i \neq C_j$, alors C_i et C_j sont disjoints. Donc $[C_i]$ et $[C_j]$ utilisent autres vecteurs de base $[g]$. Il suit que les $[C_i]$ sont linéairement indépendants sur k.

Soit $c = \sum_{x\in G} a_x[x]$ dans le centre de kG, donc pour chaque $g \in G$ on a

$$c = [g^{-1}]c[g] = \sum_{x\in G} a_x[g^{-1}xg] = \sum_{x\in G} a_{gxg^{-1}}[x].$$

Donc les coefficients $a_x = a_{gxg^{-1}}$ sont constants sur chaque classe de conjugaison. Posons $a_i := a_x$, pour un $x \in C_i$. Alors $c = \sum_{i=1}^{c} a_i[C_i]$ et c commute aussi avec les scalaires, donc les coefficients a_i sont dans le centree $C(k)$, et donc les C_i font une base du centre de kG comme $C(k)$-espace vectoriel. □

Si $|G| \in k^\times$ le théorème de Wedderburn donne une autre description du centre de kG.

5.4. **Autre description du centre de kG.** Si V_i est un kG-module simple et $c \in C(kG)$, alors l'application linéaire

$$\mu_{i,c} : V_i \longrightarrow V_i : w \mapsto cw$$

commute avec l'opération de G, donc est par définition un élément du corps gauche H_i. Nous montrons que $\mu_{i,c}$ est même dans le centre de H_i, alors

$$\mu_i : C(kG) \longrightarrow C(H_i) : c \mapsto \mu_{i,c}.$$

Et aussi que

$$(\mu_1, \ldots, \mu_s) : C(kG) \longrightarrow C(H_1) \oplus C(H_2) \oplus \ldots \oplus C(H_s)$$

est un isomorphisme d'anneaux.

Corollaire 5.1. *Même hypothèses comme dans le théorème de Wedderburn, en particulier $|G| \in k^\times$ et $\dim_{C(k)} k < \infty$.*

L'application

$$(\mu_1, \ldots, \mu_s) : C(kG) \longrightarrow C(H_1) \oplus C(H_2) \oplus \ldots \oplus C(H_s)$$

est un isomorphisme d'anneau.

Donc si c est le nombre de classes de conjugaison de G, et s le nombre de kG-modules simples on a

$$c = \dim_{C(k)} C(kG) = \sum_{i=1}^{s} \dim_{C(k)} C(H_i) \geq s.$$

En particulier, le nombre des kG-modules simples (à isomorphisme près) est égal au nombre de classes de conjugaison dans G si et seulement si $C(H_i) = C(k)$ pour chaque i.

Preuve du corollaire. Par le théorème de Wedderburn on obtient un isomorphisme d'anneau :

$$(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_c) : \ kG \longrightarrow \mathrm{End}_{H_1}(V_1) \oplus \mathrm{End}_{H_2}(V_2) \oplus \ldots \oplus \mathrm{End}_{H_s}(V_s).$$

Par restriction on obtient un isomorphisme entre les centres. Par la prop 5.1, le centre de $\mathrm{End}_{H_i} V_i$ est $C(H_i)\mathbf{1}_{V_i}$. □

Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, C.P. 6128, succursale Centre-ville, Montréal (Québec), Canada H3C 3J7

E-mail address: broera@DMS.UMontreal.CA