3. Semaine 3

3.1. **Algèbre de groupe, algèbre de monoïde.** Si $(M, *)$ est un monoïde avec neutre $\mathbf{1}_M$ et A un anneau commutatif on a construit le A-module libre AM, des expressions

$$\sum_{m\in M}{}' a_m[m],$$

où l'accent $\sum'$ indique que la somme est finie (seulement un nombre fini de coefficients sont non-zéro).

Maintenant AM obtient une multiplication : premièrement entre les éléments de base :

$$[m_1]\cdot[m_2] := [m_1 * m_2]$$

et en général

$$(\sum_{n\in M}{}' a_m[m])(\sum_{n\in M}{}' a_n[n]) := \sum_{m\in M}{}' \sum_{n\in M}{}' a_m a_n[m*n] = \sum_{p\in M}{}' \left(\sum_{m\in M, n\in M : m*n=p}{}' a_m a_n\right)[p].$$

Le neutre pour la multiplication est $\mathbf{1}_{AM} := \mathbf{1}_A[\mathbf{1}_M]$. Le cas ou M est même un groupe fini est traité [1][p. 236/237].

Exercice 3.1. Soient A et B deux anneaux commutatifs et $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneau. Soit G et H deux groupes et $\phi : G \to H$ un homomorphsime de groupe.

(i) Montrer que B est un A-module avec la multiplication externe $a \cdot b := f(a)(b)$.

(ii) Trouver une multiplication externe de l'anneau AG sur BH pour laquelle BH est un AG-module "intéressant".

(iii) Trouver aussi quatre homomorphismes d'anneau entre AG et BH. Décrire les noyaux, si possible.

3.2. **Remplir les détails.** J'ai revu la matière de sections 7.1 (sauf example : Quadratic Integer Rings, p. 229,230], 7.2. Lire ces sections au complet !

On a introduit l'anneau de séries formelles $A[[X]]$ sur un anneau commutatif A (les polynômes en X qui n'arrêtent pas). On a plus ou moins fait l'exercice (i) suivant.

Exercice 3.2. (i) Faire [1][p.238 : exc 3].

(ii) Faire [1][p.238 : exc 4].

(iii) Faire [1][p.238 : exc 5a].

J'ai revu la matière de section 7.3. Lire cette section au complet !

Exercice 3.3. (i) Montrer [1][p. 246, Theorem 8] en utilisant le théorème analogue de la théorie de groupes.

(ii) Faire [1][p. 249 : exc 24].

(iii) Montrer [1][p. 349Theorem 4] en utilisant le théorème analogue de la théorie de groupes.

Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, C.P. 6128, succursale Centre-ville, Montréal (Québec), Canada H3C 3J7

E-mail address: broera@DMS.UMontreal.CA