3. Exercices TP3, 26 septembre

Exercice 3.1. Traduire en logique (en termes de fonctions propositionnelles, $\wedge$, $\forall$, $\rightarrow$ etc) :

(i) "Si q est une fraction alors il existe un nombre r positif tel que qr et r sont des nombres entiers".

(ii) "Un nombre entier est pair ou impair mais n'est jamais pair et impair".

Exercice 3.2. Soit $p(x) :=$ "$x < 9$" la fonction propositionnelle avec univers de discours $\mathbb{Z}_{>0} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Et $q(x, y) :=$ "$xy \geq 9$" la fonction propositionnelle avec univers de discours $(\mathbb{Z}_{>0})^2$.

Expliquer pourquoi la proposition suivante est vraie

$$\forall x \left[(\forall y \ q(x, y)) \leftrightarrow \neg p(x) \right].$$

Exercice 3.3. (i) Montrer la tautologie $((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q) \Leftrightarrow V$ en utilisant des tables de vérités.

(ii) Montrer $(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow F$ et $((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q) \Leftrightarrow V$ en utilisant seulement des mots français.

(iii) Utiliser seulement de l'algèbre (de Boole) pour montrer la tautologie

$$((p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)) \Leftrightarrow V$$

(comme dans le cours). Il faut indiquer les règles utlisées.

Exercice 3.4. (i) Comparer les deux "arguments" semblables suivants.

"On sait que p implique q, mais p est faux; alors q est aussi faux" (courte pour : *On sait que l'implication $p \rightarrow q$ est vraie et que la proposition p est fausse; alors la proposition q est fausse aussi*)

et

"On sait que p implique q, mais q est faux; alors p est aussi faux" (courte pour : *On sait que l'implication $p \rightarrow q$ est vraie et que la proposition q est fausse; alors la proposition p est fausse aussi*).

Trouver pourquoi le premier argument est logiquement **invalide** mais que le deuxième argument est logiquement valide.

(ii) Est-ce que l'argument suivant est valide ?

"On a q et que q est impliqué par p; alors p.

(iii) Est-ce que vous accepteriez : *On sait que q est vraie, alors l'implication $p \rightarrow q$ est vraie* ?

(iv) Et : *On sait que p est faux, alors l'implication $p \rightarrow q$ est vraie* ?

(v) Et : *On sait que l'implication $p \rightarrow q$ est faux, alors q est vraie* ?

Exercice 3.5. (i) Qu'est-ce que vous pensez de la preuve de:

"Soit $a \in \mathbb{N}$. Si $a^2 = 9$ alors $a = 3$."

Preuve par contradiction. Supposons par contre que $a^2 \neq 9$. Alors nécessairement $a \neq 3$. Contradiction ! Donc c'est vraie. $\square$

(L'argument est basée sur quelle vérité ou contre-vérité ?)

(ii) Montrer par une preuve par intimidation : "Soit $a \in \mathbb{N}$. Si $a^2 = 9$ alors $a = 3$."

(iii) Montrer par une vraie preuve par contradiction que la proposition suivante est fausse: "Soit $a \in \mathbb{N}$. Si $a^2 = 9$ alors $a = 3$."

Exercice 3.6. (i) Montrer comme vous voulez :

$$[(p \to r) \wedge (\neg p \to q) \wedge (q \to s)] \Rightarrow (\neg r \to s).$$

(ii) Montrer comme vous voulez :

$$[((\neg p \vee \neg q) \to (r \wedge s)) \wedge (s \to t) \wedge \neg t] \Rightarrow p.$$

(iii) "Si le mariage était annulé ou s'il ne faisait pas beau après, alors Marie-Claude aurait été mal-contente et son voyage aurait été annulé. Si le voyage était annulé, les frais de voyage seraient été remboursés. Les frais de voyage ne sont pas remboursés. Donc le mariage n'est pas annulé." D'accord avec (la logique de) ce raisonnement ? Faire le lien avec (ii).