10. Principe des tiroirs de Dirichlet, ou le principe des nids de pigeon

Considérons un très simple principe.

Proposition 10.1 (Principe des tiroirs de Dirichlet)**.** [18] *Si $m+1$ objets ou plus sont rangés dans m tiroirs, alors il y aura au moins un tiroir qui contient deux objets ou plus.*

Ce principe est régulièrement utilisé, mais souvent d'un façon surprenant.

Dans un problème donné, il faut chercher les "objets", les "tiroirs" et le façon de "ranger" les objets dans les tiroirs.

La version mathématique est la suivante. Les objets sont les éléments du domaine, et les tiroirs sont les éléments du codomaine.

Proposition 10.2. *Soit $f : A \to B$ une fonction entre deux ensembles finis. Posons $n = |A|$ et $m = |B|$.*

(i) Si $n > m$ alors il existe un $b \in B$ tel que $|f^{-1}(b)| \geq 2$.

(ii) Plus généralement, si pour un nombre naturel r on a $n > rm$ alors il existe un $b \in B$ tel que $|f^{-1}(b)| \geq r+1$.

Démonstration. (i) est le cas spécial de (ii) où $r = 1$.

(ii) On a
$$|A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(b)|,$$
car $f^{-1}(b) \cap f^{-1}(b') = \emptyset$, si $b \neq b'$ sont deux éléments de B. En fait $A = \bigcup_{b \in B} f^{-1}(b)$ est une union disjointe et $A = \bigcup_{b \in \mathrm{Im}(f)} f^{-1}(b)$ une *partition* de A.

Supposons par contre que $|f^{-1}(b)| \leq r$ pour chaque $b \in B$. Alors
$$n = |A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(b)| \leq |B| r = mr,$$
ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $n > rm$. Donc en effet il existe un $b \in B$ tel que $|f^{-1}(b)| \geq r+1$. □

Démonstration du principe des tiroirs de Dirichlet. Soit B l'ensemble des tiroirs, et A l'ensembles des objets. Soit x un objet, rangé dans le tiroir t, alors on écrit $f(x) = t$. Ça donne une fonction $f : A \to B$. On a $|A| > m$ et $|B| = m$. Donc il existe un $t \in B$ tel que $|f^{-1}(t)| \geq 2$. En autres mots, dans ce tiroir t on a rangé au moins 2 objets. □

Exemple 10.1. On suppose qu'un groupe de pigeons s'envole vers un ensemble de nids pour s'y percher. S'il y a plus de pigeons que de nids, il doit y avoir au moins un nid dans lequel se trouvent au moins deux pigeons.

Exemple 10.2. Dans un groupe avec au moins 367 personnes, il doit y avoir au moins deux personnes qui ont la même date d'anniversaire.

18. Voir aussi [R, §4.2]

Exemple 10.3. Dans un groupe avec au moins 241 personnes, il doit y avoir au moins vingt et un personnes qui ont dans le même mois leurs anniversaires.

Démonstration. Soit A l'ensemble des personnes dans ce groupe et B l'ensemble des 12 mois. Si la personne P dans ce groupe est née dans le mois M on écrit $f(P) = M$. C'est une fonction $f : A \to B$. Ici $|A| = 241$ et $|B| = 12$ et $241 > 20 \cdot 12$. Donc il existe un mois M tel que $|f^{-1}(M)| \geq 21$.

En autres mots, dans ce mois M au moins 21 personnes dans ce groupe a son anniversaire. □

Exemple 10.4. Soit $n > 1$ et E une collection d'au moins $n+1$ nombres entiers différents. Il existe deux nombres différents dans E, disons a et b, tels que leur différence $a-b$ est divisible par n.

Démonstration. Soit $B = \{m \in \mathbb{N} | 0 \leq m < n\}$. Soit $a \in E$. Il existe un unique $r \in B$ qui est le reste de a après division par n ; posons $f(a) = r$. Ça donne une fonction $f : E \to B$. Ici $|E| > n$ et $|B| = n$. Donc il existe un $r \in B$ tel que $|f^{-1}(r)| \geq 2$.

C.-à-d., il existe deux nombres dans E, disons a et b, qui ont le même reste r après division par n. Donc leur différence $a - b$ est divisible par n. □

Exemple 10.5. Soit E un ensemble d'entiers d'au moins $n+1$ éléments positifs inférieurs ou égaux à $2n$. Il existe un entier dans E, disons a, qui divise un des autres éléments de E, disons b : c.-à-d. $a|b$.

Démonstration. Chaque nombre $m \in E$ s'écrit uniquement comme $m = 2^e q$, où $e \geq 0$ et q impair (et $0 < q < 2n$). Soit B la collection des nombres positifs impairs, plus petit que $2n$ et $f : E \to B$ la fonction définie par

$$f(m) = q.$$

On a $|E| > n$ et $|B| = n$. Donc, par le principe des tiroirs de Dirichlet, il existe un $q \in B$ tel que $|f^{-1}(q)| \geq 2$. C.-à-d., il y a deux nombres de la forme $m_1 = 2^{e_1} q$, $m_2 = 2^{e_2} q$ dans E. On peut supposer que $e_1 < e_2$. Donc $m_1 | m_2$. □

Exemple 10.6. Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$ une suite de $2n$ nombres naturels positifs, et supposons que leurs somme est $\leq 3n$. Alors il existe $i < j$ tel que $a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j = n - 1$.

Example : $n = 5$: $(1, 1, 1, 5, 1, 1, 2, 1, 1, 1)$, $i = 4$, $j = 7$.

Démonstration. Une preuve pas facile à trouver : Posons $A = \{s_1, s_2, \ldots, s_{2n}, t_1, t_2, \ldots, t_{2n}\}$, un ensemble de $4n$ éléments, où les s_i et t_j n'ont pas une signification spéciale. À chaque élément nous allons donner une *valeur* :

$$v(s_i) := a_1 + a_2 + \ldots + a_i, \; v(t_j) := n - 1 + v(s_j).$$

Les a_i sont positifs, alors $0 < v(s_1) < v(s_2) < \ldots < v(s_{2n}) \leq 3n$. Aussi $n - 1 < v(t_1) < v(t_2) < \ldots < v(t_{2n}) \leq 4n - 1$.

Posons $B = \{1, 2, 3, \ldots, 4n - 1\}$. On a ainsi défini une fonction

$$v : A \to B.$$

Ici $|A| > |B|$, donc par le principe des tiroirs de Dirichlet il existe une valeur $m \in B$ telle que $|v^{-1}(m)| \geq 2$. Les valeurs des s_i sont tous différentes, et aussi les valeurs des t_j.

Donc il existe un j et un i tel que $v(s_j) = v(t_i) = m$:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_i + n - 1.$$

Nécessairement $i < j$ et

$$a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j = n - 1.$$

$\square$

11. Dénombrement

[19] Si on a une collection d'objets on veut souvent faire quelque chose avec ça. Disons : d'énumerer les objets systématiquement ou de les compter ; de classifier les objets selon un certain principe (ou une relation d'équivalence) et puis d'énumerer ou de compter les objets dans les classes différents. L'énumération systématique et le comptage de façon systématique sont très liés. On le fait possiblement pour le besoin d'estimer une probabilité que quelque chose arrivera.

Dans ce chapitre on va donner quelques exemples typiques de dénombrement, et un peu comment on peut trouver des analogies ou des différences entre deux problèmes différents de comptage. Souvent il existe des différences subtiles entre deux analyses d'une situation pratique ; tous les deux bonnes ou pas tous les deux sont bonnes. Dans la vraie vie souvent certains hypothèses sont cachées, il faut les découvrir si nécessaire en posant des questions !

La clef pour bien comprendre un problème de comptage et d'éviter des erreurs, est de reformuler ce problème en termes de constructions avec des ensembles (ou des multi-ensembles) et des fonctions.

Dans la vraie vie *Cherchez la femme, pardieu ! cherchez la femme !*, selon Alexandre Dumas ; pour la modélisation discrète *Cherchez l'ensemble, pardieu ! et cherchez la fonction !*

Exemple 11.1. Voici la description d'un jeu entre deux joueurs A et B. Chaque joueur lance un dé ordinaire de six côtés. Supposons que A obtient la valeur a et B la valeur b. Joueur B gagne si $a \leq b$ et A doit payer \$ 3 à B. Sinon A gagne et B doit payer \$4 à A. Puis on répète beaucoup de fois. C'est plus facile pour B de gagner une partie, mais il gagne moins d'argent qu'il doit payer s'il perd. Qui a l'avantage à long terme ?

Pour répondre, nous allons considérer deux ensembles de possibilités. Commençons par *énumérer systématiquement* tous les résultats (a, b) d'une lance de dé de chacun (vous comprenez le système d'énumération ?) :

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

Il y a 6 possibilités pour chaque dé, et en total $6 \cdot 6 = 36$, comme on voit. Chaque cas à la même "probabilité" de $\frac{1}{36}$.

19. Voir aussi [R, §4.1, §5]

Les cas favorables pour B sont

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
 & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
 & & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
 & & & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
 & & & & (5,5) & (5,6) \\
 & & & & & (6,6)
\end{array}$$

Donc en total il y a 21 cas favorable pour B. Donc la "probabilité" que B gagne est $\frac{21}{36} = 0.583333...$

Il y a donc $36 - 21 = 15$ cas favorable pour A, donc la "probabiilité" que A gagne la partie est $\frac{15}{36} = 0.416666....$

Si on joue beaucoup de parties, disons 1000 parties, on prévoit que B va gagner environ 58.33% des parties et A environ 41.67% des parties.

Donc B reçoit environ $583.3 \cdot \$3 = \$1750$ et doit payer environ $416.7 \cdot \$4 = \$1667$. Donc l'avantage est pour B à long terme.

Dans la formulation du problème il n'y avait pas d'ensemble. Mais dans l'analyse nous avons utilisé l'ensemble des cas possibles (qui est un produit cartésien de deux ensembles de 6 éléments chacun) et une partition en deux sous-ensembles (les cas favorables pour B, respectivement pour A). Et les fractions des tailles par rapport à l'ensemble total nous donnait les deux "probabilités".

11.1. **Principes de la somme et du produit.** [20] Dans la logique on peut obtenir des propositions logiques composées en utilisant $\wedge$ et $\vee$; ou inversement simplifier des propositions. On peut aussi souvent briser un grand problème de comptage en plusieurs plus petits problèmes en utilisant les principes de bases de *ou* et de *et*. Ces deux principes sont formulés dans le manuel ainsi :

Principe 11.1 (Principe de la somme)**.** *Si on peut accomplir une tâche de m façons et une deuxième tâche de n façons, et si on ne peut effectuer ces tâches simultanément, alors il y a $m + n$ façons d'exécuter l'une ou l'autre de ces tâches.*

Principe 11.2 (Principe du produit)**.** *On suppose qu'une procédure peut être divisée en deux tâches. S'il existe m façons de faire la première tâche et n façons d'accomplir la deuxième tâche lorsque la première est terminée, alors il y a $m \cdot n$ façons d'effectuer la procédure.*

Puis on peut répéter les principes.

Exemple 11.2. Dans un café on peut acheter 6 sortes de muffin, 7 sortes de boisson chaud comme café ou thé et 5 sortes de boisson froid comme jus de fruit. Combien de façons de choisir un boisson et un muffin ?

20. Voir aussi [R, §4.1]

Il y a deux tâches : choisir un boisson *et puis* choisir un muffin.

La première tâche est choisir un boisson, c.-à-d., choisir un boisson chaud *ou* un boisson froid. Selon le principe de la somme : $7+5=12$ façons de choisir un boisson.

N'importe le choix du boisson, il y aura toujours 6 façons de choisir le muffin. Donc par le principe du produit : en total $(7+5)\cdot 6=72$ façons de choisir un boisson et un muffin.

Exemple 11.3. Pour avoir accès à un certain site sur internet un utilisateur doit fournir un mot de passe. Un mot de passe ayant six à huit caractères, où chaque caractère est une lettre majuscule ou un chiffre. Chaque mot de passe doit contenir au moins un chiffre. Combien de possibilités de mots de passe[21] ?

Solution : On va briser d'abord en trois sous-problèmes : combien de mots de passe de longueur 6, 7 ou 8. Disons P_6, P_7 et P_8 sont les nombres de mots de passe respectivement. Alors le nombre total de mots de passe permis sera $P_6+P_7+P_8$.

Si $n=6,7$ ou 8, soit A_n de mots de passe ayant n caractères (sans la restriction qu'il faut avoir au moins un chiffre) et E_n le nombre de mots de passe qui contiennent aucun chiffre (les exceptions qui ne sont pas permises comme mot de passe). Par le principe de l'addition on a $A_n=P_n+E_n$. Donc P_n sera connu, dès que A_n et E_n sont connus.

Choisir un mot de passe (sans restriction) est choisir le premier caractère $(26+10$ possibilités) *et puis* choisir le deuxième caractère $(26+10$ possibilités) , *et puis* le troisième caractère $(26+10$ possibilités), ..., *et puis* finalement choisir le n-ième caractère. Par le principe du produit $36\cdot 36\cdot 36\cdots = 36^n$ façons en total. Donc $A_n=36^n$.

Similairement le nombre d'exceptions est $E_n=26^n$. Et $P_n=A_n-E_n=36^n-26^n$.

Donc la réponse totale est $36^6-26^6+36^7-26^7+36^8-26^8=2684483063360$.

11.2. **Versions ensemblistes.** Une version ensembliste du principe de la somme est (i) du suivant, que nous connaissons déjà. La deuxième partie est une généralisation

Principe 11.3. *(i) Si on a deux ensembles finis A et B tels que $A\cap B=\emptyset$ alors $|A\cup B|=|A|+|B|$*

(ii) Supposons on a r ensembles $A_1,A_2,\ldots,A_r$ où $A_i\cap A_j=\emptyset$ si $i\neq j$. Alors

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_r|=|A_1|+|A_2|+\ldots+|A_r|.$$

Démonstration du principe de la somme. Soit A l'ensemble des façons de faire la première tâche et B l'ensemble des façons de faire la deuxième tâche. On ne peut jamais choisir simultanément veut dire que $A\cap B$ est vide. Choisir un élément de A ou un élément de B est la même chose qu'exécuter une des deux tâches. Donc on veut connaître $|A\cup B|$. Par le principe précédent, c'est égal à $|A|+|B|$. □

Une version ensembliste du principe du produit est le suivant :

21. Voir aussi [R, Ex. 14, p. 223]

Principe 11.4. *Soit $f : A \to B$ une fonction entre deux ensembles finis, telle que pour chaque $b \in B$ on a $|f^{-1}(b)| = n$. Alors $|A| = |B| \cdot n$.*

Démonstration. Cette fonction f définit une relation d'équivalence sur A dont chacun des m classes d'équivalence est de la forme $f^{-1}(b)$ et contient n éléments. Donc $|B| = mn$. □

Ou reformulé en termes de tiroirs.

Principe 11.5 (L'*autre* principe des tiroirs de Dirichlet)**.** *Supposons on a rangé N objets dans les m tiroirs d'une commode, tel que chaque tiroir contient exactement n de ces objets. Alors $N = nm$.*

Démonstration. Posons A pour l'ensemble des objets, et B pour l'ensemble des tiroirs. Si x est un des objets, on définit $f(x) = t$, si $t \in B$ est le tiroir dans lequel on a rangé l'objet x. Ça donne une fonction de placement

$$f : A \to B.$$

Si $t \in B$ est un tiroir, alors $f^{-1}(t)$ et le sous-ensemble de A des objets qu'on a placé dans ce tiroir t. Nous pouvons utiliser le principe précédent, et conclure que $N = |A| = |B|n = nm$. □

Démonstration du principe du produit. Soit A l'ensemble des façons de faire les *deux* tâches et B l'ensemble des façons de faire seulement la *première* tâche. La fonction f associe à une façon de faire les deux tâches : la façon qu'on fait seulement la première tâche. Pour une façon donnée de faire la première tâche, il y a toujours n façons d'après accomplir (après cette façon de faire cette première tâche fixée) la deuxième tâche, par hypothèse. Donc les préimages de notre fonction ont toujours n éléments. Puis on conlut. □

11.3. **Couples et suites.** Des couples et des listes d'objects jouent un grand rôle dans la vraie vie, et aussi dans les mathématiques. Soient E et F deux ensembles finis et $E \times F$ leur produit cartésien. Alors $|E \times F| = |E| \cdot |F|$.

Démonstration. Énumérer tous les éléments $(x, y) \in E \times F$ consiste de deux tâches : choisir le premier coefficient, disons x, et puis choisir le deuxième coefficient, disons y. Il y a $|E|$ façons de choisir le $x \in E$ et puis, n'importe le x choisir a $|F|$ façons le $y \in F$. Par le principe du produit $|E \times F| = |E| \times |F|$.

Une preuve alternative : Définissons la fonction

$$f : E \times F \to E$$

par $f((x, y)) = x$ (en mots : la fonction "oublier le deuxième coeficient"). Alors $f^{-1}(x_0) = \{(x_0, y)|y \in F\}$ a toujours $|F|$ éléments. On conclut par l'autre principe des tiroirs de Dirichlet. □

Si E est un ensemble fini alors $|E \times E| = |E|^2$ et on montre par induction que $|E^n| = |E|^n$ (en utilisant le fait que E^{n+1} est en bijection avec $E \times E^n$). En autres mots le nombre des suites $(x_1, \ldots, x_n)$ où chaque $x_i \in E$ est $|E|^n$:

$$|E^n| = |E|^n.$$

Exemple 11.4. Soit A et B deux ensembles finis, $|A| = m$ et $|B| = n$. Il existe n^m fonctions de A dans B. La raison est qu'il y a une fonction bijective entre l'ensemble de ces fonctions, et l'ensemble des suites dans B^m, comme nous avons déjà montré plus tot dans ce cours (la fonction "prendre la deuxième ligne" d'une fonction sous-la forme deux-lignes).

Démonstration. Fixons une énumeration des éléments de A, disons $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$.

Preuve sophistiquée : Soit $f : A \to B$ une fonction arbitraire. On peut l'écrire comme

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_m \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_m \end{pmatrix},$$

where $b_i = f(a_i) \in B$. Il y a donc une suite associée à f ("deuxième ligne") :

$$(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m) \in B^m$$

Et chaque suite dans B^m vient d'une unique fonction.

Donc le nombre de fonctions est égal au nombre de suites dans B^m. Donc la réponse est $|B^m| = |B|^m = n^m$.

Preuve alternative et directe : il y a n façons de choisirla première valeure de la fonction $f(a_1)$, et *puis* il y a aussi n façons de choisir $f(a_2)$, etcetera. Donc par le principe du produit (répété)n^m. Ce n'est pas une coincidence qu'on peut compter les fonctions, comme nous avons compté les suites ! □

Dans la preuve nous avons d'abord montré plus que "ce qui semble nécessaire". D'abord nous avons établie (ou rappelé) une correspondance (ou une fonction bijection) entre l'ensemble des suites et l'ensemble des fonctions. Après, nous avons conclu que le *nombre* des suites est égale au *nombre* des fonctions. Et nous savions déjà le nombre des suites, donc après nous savons automatiquement aussi le nombre des fonctions.

Cette bijection nous peut servir pour d'autres choses : si on comprend quelques chose (une relation d'équivalence disons) pour les suites (ou les fonctions) nous pouvons comprendre quelque chose comparable pour les fonctions (resp. les suites). Disons, si on peut énumérer systématiquement les suites, alors automatiquement on obtient aussi un façon d'énumérer les fonctions !

Donc cette meilleure comprehension de la relation entre les deux ensemble nous peut être utile plus tard.

11.4. **Les n-Permutations.** [22] Soit E un ensemble fini. Combien de suites $(x, y) \in E^2$ existent-t-ils où $x \neq y$? Réponse : $|E| \cdot (|E| - 1)$.

Démonstration. Il y a deux tâches à faire : il faut choisir le premier coefficient de la suite et puis le deuxième coefficient. Il y a $|E|$ de façons de choisir le premier coefficient. Après il y a encore $|E|-1$ façons de choisir le deuxième coefficient (car on a un choix de moins : le premier coefficient n'est plus disponible). Par le principe du produit, la réponse est $|E| \cdot (|E| - 1)$.

Preuve alternative : Posons $B = \{(x, y) \in E \times E | \ x \neq y\}$ et la fonction $f : B \to E$ est définie par $f((x, y)) = x$. Fixons $x_0 \in E$, alors

$$f^{-1}(x_0) = \{(x_0, y) | y \in E,\ y \neq x_0\}$$

a toujours $|E|-1$ éléments. Donc $|B| = |E|\cdot(|E|-1)$ est la réponse, par le deuxième principe des tiroirs de Dirichlet. □

En répétant cet argument on obtient que le nombre des suites $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ où tous les x_i's sont différents est $m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$, si $m = |E|$.

Définition 11.1. *Soit E un ensemble.*

*(i) Une n-*permutation *de E est une suite de longueur n*

$$(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$$

telle que $x_i \neq x_j$ pour chaque couple $i \neq j$. Donc l'ordre importe, et il n'y a pas de répétitions.

(ii) On écrit $P(m, n)$ pour le nombre de n-permutations de E, si $|E| = m$.

(iii) Une permutation de E est par définition une m-permutation (si encore $m = |E|$).

On vient de montrer :

Proposition 11.1. *Supposons $|E| = m$.*

(i) Si $1 \leq n \leq m$ on a

$$P(m, n) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

et $P(m, n) = 0$ si $m < n$. Nous définissons $P(m, 0) = 1$.

(ii) Il y a donc $m!$ permutations de E.

Exemple 11.5. On obtient une n-permutation si on choisit dans l'ordre n fois, et sans remise, un élément dans un ensemble E de m éléments. Et vice versa. Donc le nombre des choix de n éléments dans E sans remise, si l'ordre des choix est considéré relevant, est aussi $P(m, n)$.

Exemple 11.6. Soit A et B deux ensembles finis, $|A| = n$ et $|B| = m$.

(i) Il existe $P(m, n)$ fonctions *injectives* de A dans B.

(ii) il existe $m!$ fonctions bijective de B dans B, si $|B| = m$.

22. Voir aussi [R, §4.3]

Démonstration. (i) Maintenant rappelons que la fonction

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_m \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_m \end{pmatrix}$$

est injective si et seulement s'il n'y pas de répétitions dans la deuxième ligne (qui est une suite dans B^n). On conclut que l'ensemble des fonctions injectives est en bijection avec l'ensemble des n-permutations de B. Donc la réponse est $P(m, n)$.

(ii) Est un cas spécial de (i) (Exercice : pourquoi ?)

À vous de donner une preuve directe, motivé par la façon de compter les m-permutations en utilisant le principe multiplicatif répété. □

La preuve est encore pareille aux autres : nous avons d'abord rappelé que l'ensemble des fonctions injectives et en correspondance (ou en bijection) avec l'ensemble des n-permutations de B. On connait les nombre des n-permutations, donc on connaît automatiquement aussi le nombre des fonctions injectives.

11.5. **Les n-Combinaisons.** [23] Soit E un ensemble. Nous rappelons qu'une n-permutation de E est une suite

$$(x_1, \dots, x_n) \in E^n$$

telle que $x_i \neq x_j$ (si $i \neq j$). En autre mots : on choisit n éléments de E, et l'ordre des choix est essentiel (et répétitions ne sont pas permises).

Mais si on choisit n éléments différents on obtient aussi un sous-ensemble de n éléments de E :

$$\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq E.$$

Mais dans ce cas l'ordre des choix des éléments n'a aucune importance, car

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} = \{x_2, x_1, x_3, x_4, \dots, x_n\} = \{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1\} = ...$$

comme sous-ensembles.

Définition 11.2. *Soit E un ensemble.*

(i) Une n-combinaison *de E, est un choix de n éléments différents de E, disons $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, où l'ordre des choix est considéré comme irrélevant. C'est la même chose comme un choix de sous-ensemble de n éléments de E (ou le choix d'un élément de $\binom{E}{n}$).*

(ii) On écrit : $C(m, n)$, ou $\binom{m}{n}$, pour le nombre de n-combinaisons de E, si $|E| = m$.

Proposition 11.2. *Soit E un ensemble fini de m éléments. Alors le nombre des n-combinaisons de E est*

$$C(m, n) = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

23. Voir aussi [R, §4.3]

et $C(m,n) = 0$ *si* $m < n$, *et* $C(m,0) = 1$. *Ou*

$$\left|\binom{E}{n}\right| = \binom{|E|}{n} = \binom{m}{n} = C(m,n).$$

Démonstration. Nous allons compter le nombre de n-permutations de E encore une fois, en deux étapes. Choisir d'abord une n-combinaison $A \subset E$ (on peut le faire de $P(m,n)$ façons), et puis choisir une permutation de A (qui est aussi une n-permutation de E) (on peut faire ça de $n!$ façons). Donc par le principe du produit : $P(m,n) = C(m,n)n!$. Il suit que

$$C(m,n) = \frac{P(m,n)}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Une preuve alternative (qui est "la même", mais dans une autre guise) : Soit A l'ensemble des n-permutations de E et B l'ensemble des n-combinaisons de E. Une fonction $f : A \to B$ est définie, si on associe au n-permutation $(x_1, \ldots, x_n) \in A$ la n-combinaison $\{x_1, \ldots, x_n\} \in B$ (on "oublie" l'ordre du choix).

Pour un élément $C \in B$ (c.-à.d., une n-combinaison de E), alors $f^{-1}(C)$ sont toutes les permutations de C ; il y en a $n!$. Par l'*autre* principe de Dirichlet (ou sa version ensembliste) $|A| = |B|n!$, ou $P(m,n) = C(m,n)n!$. Il suit que

$$C(m,n) = \frac{P(m,n)}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

□

Exemple 11.7. Pour illustrer un peu cette preuve nous allons *énumérer* systématiquement toutes les 3-permutations de $E = \{a,b,c,d\}$ par la même idée.

Il y a $P(4,3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ de 3-permutations et $C(4,3) = \frac{P(4,3)}{3!} = 4$ de 3-combinaisons de E. Ces 3-combinaisons sont

$$\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}.$$

Chaque 3-combinaison donne 3! (= 6) 3-permutations ; respectivement :

$$(a,b,c), (b,c,a), (c,a,b), (b,a,c), (c,b,a), (a,c,b)$$

$$(a,b,d), (b,d,a), (d,a,b), (b,a,d), (d,b,a), (a,d,b)$$

$$(a,d,c), (d,c,a), (c,a,d), (d,a,c), (c,d,a), (a,c,d)$$

$$(d,b,c), (b,c,d), (c,d,b), (b,d,c), (c,b,d), (d,c,b)$$

Nous avons trouvé toutes les 3-permutations.

11.6. **Formules pour $C(m,n)$.** Beaucoup d'identités sont connues impliquant les $C(m,n)$'s. Par exemple

$$C(m,n) = C(m,m-n)$$

(un exercice pour vous... [24]) et

$$2^m = C(m,0) + C(m,1) + C(m,2) + \ldots + C(m,m)$$

(raison : nous avons la partition $P(E) = \cup_{n=0}^{m} \binom{E}{n}$, et nous pouvons donc appliquer le principe de la somme généralisée [25].)

Nous donnons deux exemples ou un problème de comptage a deux solutions, chacune correcte !

Exemple 11.8. Soit E un ensemble fini, $|E| = m+1 > 0$ et $x \in E$ un élément fixé. Soit n tel que $1 \leq n \leq m$.

Combien de sous-ensembles de E existent-t-ils de taille n ?

Nous allons donner deux réponses correctes, et comparer les deux.

Réponse 1 : L'ensemble E a $m+1$ éléments, donc la réponse est $C(m+1,n)$.

Réponse 2 : On peut choisir un sous-ensemble qui contient x *ou* un sous-ensemble qui ne contient pas x.

Il y a $C(m,n)$ sous-ensembles de taille n de $E - \{x\}$, parce que $|E - \{x\}| = m$.

Pour choisir un sous-ensemble de taille n qui contient x, on peut commencer par choisir un sous-ensemble de taille $n-1$ dans $E - \{x\}$ et puis ajouter x à ce sous-ensemble : le nombre de façons de le faire est donc $C(m,n-1)$.

Par le principe de la somme, la réponse totale est $C(m,n) + C(m,n-1)$.

Nous avons *montré* l'identité [26] de Pascal :

Lemme 11.1 (Identité de Pascal)*. Soit $n \leq m$ alors*

$$C(m+1,n) = C(m,n) + C(m,n-1) = C(m,n-1) + C(m,n).$$

24. Voir aussi [R, p.239]
25. Voir aussi [R, p.241]
26. Voir aussi [R, p.240]

Remarque. Cette identité explique des récurrences dans le "triangle de Pascal" [27] :

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
\binom{4}{0} & & \binom{0}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{0}{3} & & \binom{4}{4} & \\
. & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & . \\
. & \binom{\mathbf{7}}{\mathbf{2}} & & \binom{\mathbf{7}}{\mathbf{3}} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & . & . \\
. & . & \binom{\mathbf{8}}{\mathbf{3}} & & \binom{8}{4} & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

$\binom{8}{3} = \binom{7}{2} + \binom{7}{3}$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
. & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
6 & & 15 & & 20 & & 15 & . & . & . \\
. & \mathbf{21} & & \mathbf{35} & & 35 & . & . & . & . \\
. & . & \mathbf{56} & & 70 & & . & . & . & .
\end{array}
$$

Chaque nombre au milieu du triange de Pascal est la somme de ces deux parents, par exemple $\binom{8}{3} = \binom{7}{2} + \binom{7}{3} = 21 + 35 = 56$.

Exemple 11.9. Soit E_1 et E_n deux ensembles finis disjoints, $|E_1| = m_1$, $|E_2| = m_2$. Soit $n \leq m_1$ et $n \leq m_2$. Combien de façons de choisir un sous-ensemble de taille n de $E_1 \cup E_2$?

Réponse 1 : L'ensemble $E_1 \cup E_2$ a $m_1 + m_2$ éléments, donc la réponse est $C(m_1 + m_2, n)$.

Réponse 2. Pour chaque entier $0 \leq r \leq n$ choisir un sous-ensemble $F_1 \subseteq E_1$ de taille r, *et puis* choisir un sous-ensemble $F_2 \subseteq E_2$ de taille $n - r$, le résultat est le sous-ensemble $F_1 \cup F_2 \subseteq E_1 \cup E_2$. Donc par les principes de "Ou" et de "Et" :

$$\sum_{r=0}^{n} C(m_1, r) C(m_2, n - r).$$

Toutes les deux réponses sont bonnes, donc on obtient une identité. On a montré une identité [28] de Vandermonde :

27. Voir aussi [R, p.240]
28. Voir aussi [R, p.241]

Lemme 11.2 (Identité de Vandermonde). *Soit $n \leq m_1$ et $n \leq m_2$. Alors*

$$C(m_1 + m_2, n) = \sum_{r=0}^{n} C(m_1, r)C(m_2, n - r).$$

11.7. **Multi-ensembles.** Nous ne pouvons pas toujours modéliser une collection de la vraie vie par un simple ensemble. Disons une vase qui contient 10 boules, dont 3 noires, 3 blanches et 4 rouges. On considère les boules de la même couleur comme *indistinguable*, les différences sont considérées comme *irrélevantes*. Disons on veut savoir combien de choix (essentiellement différents) de collections de 5 boules existent-t-ils ? Choisir deux noires, deux blanches et une rouge est une possibilité.

En ajoutant des taches sur les boules si nécessaire on peut distinguer les boules *dans la vraie vie* quand-même. Notons les trois boules noirs par n_1, n_2, n_3, les trois blanches b_1, b_2, b_3 et les rouges r_1, r_2, r_3, r_4. Maintenant nous *avons* un ensemble $E = \{n_1, n_2, n_3, b_1, b_2, b_3, r_1, r_2, r_3, r_4\}$ de dix éléments.

Il y a $P(10, 5)$ de choix de 5 éléments dans E, (appelés les 5-permutations de E), disons $(n_1, n_2, b_3, b_1, r_3)$. Mais choisir ces mêmes éléments dans un autre ordre, disons $(n_2, b_1, r_3, n_1, b_3)$ (différent dans la vraie vie), est considéré comme le *même* choix pour notre problème. L'ordre des choix est vu comme irrélevant.

Il y a $C(10, 5)$ de choix non-ordonné de 5 éléments de E (appelés les 5-combinaisons de E), par example $\{n_1, n_2, b_3, b_1, r_3\}$. Choisir le sous-ensemble $\{n_2, n_3, b_2, b_3, r_1\}$ ou choisir $\{n_1, n_2, b_3, b_1, r_3\}$ est différent dans la vraie vie, mais cette différence est aussi considérée *irrélevante* pour notre problème ! Ce donne (essentiellement) le même choix de "deux noires, deux blaches et une rouge" ! Donc ni $P(10, 5)$ ni $C(10, 5)$ ne sont la réponse de notre problème.

Dirons que deux 5-combinaisons de E sont *équivalentes* si les deux ont le même nombre de boules noires, le même nombre de blanches et le même nombre de rouges. Nous ne voulons pas compter les 5-combinaisons de E. Ce que nous voulons compter vraiment est le nombre de *classes d'équivalences* de 5-combinaisons.

Pour résoudre, nous allons modéliser la vase de boules de façon différente. Nous voyons notre collection comme un ensemble où chaque élément a une multiplicité donnée ; s'appelle un *multi-ensemble*. La collection de 3 boules noirs, 3 blanches et 4 rouges est modélisée par le multi-ensemble basé sur l'ensemble des trois types de boules (noire, blanche, rouge) où chaque élément a une multiplicité (respectivement $3, 3, 4$).

Choisir une sous-collection de 5 boules sera la même chose comme choisir un sous-multi-ensemble de taille 5.

Exemple 11.10. Supposons nous avons une vase qui contient 10 boules, dont 3 noirs, 3 blanches et 4 rouges. On considère les boules de la même couleur comme *indistinguable*, les différences comme irrélevantes.

Combien de façons différents d'en choisir cinq (ou l'ordre des choix n'importe pas, et on choisit sans remise) ? Nous allons énumérer tous les cas différents, et puis compter :

$$nnnbb, nnnbr, nnnrr,$$

$$nnbbb, nnbbr, nnbrr, nnrrr$$

$$nbbbr, nbbrr, nbrrr, nrrrr$$

$$bbbrr, bbrrr, brrrr$$

Total : seulement 14 (beaucoup moins que $P(10.5)$ ou $C(10,5)$).

Définition 11.3. *Un multi-ensemble (basé sur un ensemble E) est un ensemble E, où chaque élement de E a une multiplicité donnée. (On permet la multiplicité 0.)*

Ou, c'est un ensemble E avec une fonction $E \to \mathbb{N}$, dite la fonction multiplicité*.*

Plusieurs notations différentes sont utilisées, voir l'exemple qui suit. Un sous-multi-ensemble de E avec la *fonction multiplicité* f, est le même ensemble E mais avec une *fonction multiplicité* g, telle que $g(x) \leq f(x)$ pour chaque $x \in E$.

La *taille* d'un multi-ensemble, ou la cardinalité, est la somme de toutes les multiplicités.

Exemple 11.11. Notre vase correspond à un multi-ensemble.

Posons n pour "boule noir", b pour "boule blanche" et r pour "boule rouge".

Ici

$$E = \{n, b, r\}$$

l'ensemble des trois types de boules et la fonction multiplicité est en notation deux-lignes :

$$\begin{pmatrix} n & b & r \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Une autre notation pour notre multi-ensemble des 10 boules :

$$\{n^3, b^3, r^4\}$$

La notation $\{n, n, n, b, b, b, r, r, r, r\}$ est aussi utilisée, mais est dangereuse. Si on l'utilise, il faut toujours indiquer qu'on le considère comme multi-ensemble, et pas comme un ensemble. La taille du multi-ensemble est la somme des multiplicités, donc $3 + 3 + 4 = 10$ (le nombre de boules).

Un sous-multi-ensemble est par exemple

$$\begin{pmatrix} n & b & r \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} n & b & r \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

car toutes les multiplicités sont plus petites ou égales. La taille de $\begin{pmatrix} n & b & r \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est

$$\left| \begin{pmatrix} n & b & r \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right| = 2 + 2 + 0 = 4.$$

Les sous-multi-ensembles de taille 5 de $\{n^3, b^3, r^4\}$ sont

$$\{n^3, b^2, r^0\}, \{n^3, b^1, r^1\}, \{n^3, b^0, r^2\}$$
$$\{n^2, b^3, r^0\}, \{n^2, b^2, r^1\}, \{n^2, b^1, r^2\}, \{n^2, b^0, r^3\}$$
$$\{n^1, b^3, r^1\}, \{n^1, b^2, r^2\}, \{n^1, b^1, r^3\}, \{n^1, b^0, r^4\}$$
$$\{n^0, b^3, r^2\}, \{n^0, b^2, r^3\}, \{n^0, b^1, r^4\}$$

Ça correspond exactement aux différents choix de 5 boules.

Une question se pose naturellement : est-ce qu'il y a une formule courte ? Non, mais au moins il y a une méthode de calculer, que nous allons discuter plus tard, après avoir discuté le principe d'inclusion-exclusion.

11.8. **Choisir avec remise.** Nous avons déja resolu quelques problèmes de comptage. Soit E un *ensemble* de m éléments.

• Combien de façons de choisir n fois un élément de E (sans remise), si l'ordre est important ? C'est le nombre de n-permutations : $P(m, n)$.

• Combien de façons de choisir n fois un élément de E (sans remise), si l'ordre est irrélevant ? C'est le nombre de n-combinaisons : $C(m, n)$.

• Combien de façons de choisir n fois un élément de E avec remise, et $|E| = m$, si l'ordre est important ? C'est le nombre des suites $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, donc la réponse est m^n. Aussi appelés : les n-permutations *avec remise* de E [29].

Définition 11.4. *Soit E un ensemble et n un nombre naturel. Une n-combinaison avec remise de E est une façon de choisir n fois un élément de E avec remise, si l'ordre est considéré irrelevant.*

Une question se pose [30].

Problème (A1)**.** *Soit E un* ensemble *de m éléments, $m > 0$. Combien de n-combinaisons avec remise de E existent-ils ?*

Posons quatre autres problèmes :

Problème (A2)**.** *Soit $m, n \in \mathbb{N}$ et $m > 0$. Combien de façons de résoudre l'équation*

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_m = n,$$

avec $X_i \in \mathbb{N}$, pour chaque $1 \leq i \leq m$.

Problème (A3)**.** *Soit $m, n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble de $m > 0$ éléments.*

Soit un multi-ensemble sur E donné tel que chaque multiplicité est $\geq n$.

Combien de sous-multi-ensembles existent-t-ils de taille n ?

29. Voir aussi [R, p. 269]
30. Voir aussi [R, p. 270]

Problème (A4)**.** *Soit* $m, n \in \mathbb{N}$, $m > 0$.

Combien de suites $(s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}$ *existent-t-ils telle que* $1 \leq s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_{m-1} \leq n + m - 1$ *?*

Problème (A5)**.** *Soit* $m, n \in \mathbb{N}$, $m > 0$. *Et* $F = \{1, 2, 3 \ldots, n + m - 1\}$.

Combien de sous-ensembles de taille n *de* F *existent-t-ils ?*

Nous allons montrer qu'ils ont tous la même réponse. Nous connaissons la réponse du dernier problème, c'est le nombre des n-combinaisons d'un ensemble de $n+m-1$ éléments : $C(n + m - 1, n)$.

Mais ces problèmes ont plus en commun que seulement leur solution finale, il y a des bijections explicites sous-jacentes.

11.9. **Relation entre problèmes A1 et A2.** Soit E un *ensemble* de m éléments, $m > 0$. Fixons une énumération des éléments de E, disons $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

Soit donné une n-combinaison avec remise de E ; disons qu'on a choisi a_1 avec multiplicité r_1, a_2 avec multiplicité $r_2, \ldots, a_m$ avec multiplicité r_m, et donc $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$. Donc cette n-combinaison avec remise de E, donne une solution

$$(X_1, \ldots, X_m) := (r_1, \ldots, r_m)$$

de l'équation $X_1 + \ldots + X_m = n$ par des nombres naturels.

Par contre, soit $(X_1, \ldots, X_m) = (r_1, \ldots, r_m)$ une solution de l'équation $X_1 + \ldots + X_m = n$ avec chaque $r_i \in \mathbb{N}$. On obtient la n-combinaison de E suivante : choisir a_1 avec multiplicité r_1, a_2 avec multiplicité $r_2, \ldots, a_m$ avec multiplicité r_m. Le nombre de choix est effectivement $n = r_1 + \ldots + r_m$.

Soit Z_1 l'ensemble des n-combinaisons avec remise de E, et Z_2 l'ensemble des solutions par des nombres naturels de l'equation $X_1 + \ldots + X_m = n$. On vient de donner une fonction de Z_1 vers Z_2 avec sa fonction inverse. Donc ces fonctions sont des fonctions bijectives. S'il existe une bijection entre deux ensembles finis, alors les deux ensembles ont la même taille.

Il suit que $|Z_1| = |Z_2|$: les problèmes A1 et A2 ont la même solution.

11.10. **Relation entre problèmes A1 et A3.** Soit E un *ensemble* de m éléments, $m > 0$. Fixons une énumération des éléments de E, disons $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Aussi supposons donné un multi-ensemble donné avec fonction multiplicité :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_m \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_m \end{pmatrix},$$

où pour chaque multiplicité $n \leq s_i$.

Soit donné une n-combinaison avec remise de E ; disons qu'on a choisi a_1 avec multiplicité r_1, a_2 avec multiplicité $r_2, \ldots, a_m$ avec multiplicité r_m, et donc $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$. On obtient un multi-ensemble basé sur E de taile n avec fonction multiplicité :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_m \\ r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_m \end{pmatrix}.$$

Parce que $a_i \leq n$ et $n \leq s_i$, on obtient un sous-multi-ensemble de notre multi-ensemble donné.

Par contre, soit

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_m \\ r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_m \end{pmatrix}$$

la fonction multiplicité d'un sous-multi-ensemble de taille n de notre multi-ensemble donné. On obtient la n-combinaison de E : choisir a_1 avec multiplicité r_1, a_2 avec multiplicité $r_2, \dots, a_m$ avec multiplicité r_m. Le nombre de choix est effectivement $n = r_1 + \ldots + r_m$.

Soit Z_1 l'ensemble des n-combinaisons avec remise de E, et Z_3 l'ensemble des sous-multi-ensembles de taille n de notre multi-ensemble donné. On vient de donner une fonction de Z_1 vers Z_3 avec sa fonction inverse. Donc ces fonctions sont des bijections.

Il suit que $|Z_1| = |Z_3|$: les problèmes A1, A2 et A3 ont la même solution.

11.11. **Relation entre problèmes A4 et A5.** Soit $m, n \in \mathbb{N}$, $m > 0$ et $F = \{1, 2, 3, 4, \dots, n + m - 1\}$.

Soit donné une suite $(s_1, s_2, \dots, s_{m-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}$ telle que $1 \leq s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_{m-1} \leq n + m - 1$. Ça donne le sous-ensemble $\{s_1, s_2, \dots, s_{m-1}\} \subseteq F$ de taille $m - 1$.

Par contre, soit E un sous-ensemble de taille $m - 1$ de F. Donc chaque élément est un nombre naturel entre 1 est $n + m - 1$. Nous pouvons ordonner les éléments de E selon le grandeur. On obtient une suite $(s_1, s_2, \dots, s_{m-1})$ de nombres naturels, telle que $1 \leq s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_{m-1} \leq n + m - 1$ et $E = \{s_1, s_2, \dots, s_{m-1}\}$.

Soit Z_4 l'ensemble des suites $(s_1, s_2, \dots, s_{m-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}$ telle que $1 \leq s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_{m-1} \leq n + m - 1$ et soit Z_5 l'ensemble des sous-ensemble de taille $m - 1$ de F.

On vient de donner une fonction de Z_4 vers Z_5 avec sa fonction inverse. Donc ces fonctions sont des bijections.

Aussi nous savons que l'application qui envoit E à $\overline{E}$ est une bijection entre Z_5 et l'ensemble des sous-ensembles de taille $n = (n + m - 1) - (m - 1)$.

Il suit que $|Z_4| = |Z_5|$, et que les problèmes A4 et A5 ont la même solution.

11.12. **Relation entre problèmes A2 et A4.** Soit $m, n \in \mathbb{N}$, $m > 0$.

Soit $(X_1, \ldots, X_m) = (r_1, \ldots, r_m)$ une solution de l'équation $X_1 + \ldots + X_m = n$ avec chaque $r_i \in \mathbb{N}$. Posons

$$\begin{aligned} s_1 &:= r_1 + 1 \\ s_2 &:= r_1 + r_2 + 2 \\ s_3 &:= r_1 + r_2 + r_3 + 3 \\ \ldots &:= \ldots \\ s_{m-1} &:= r_1 + r_2 + \ldots + r_{m-1} + (m-1) \end{aligned}$$

Alors on voit facilement (en utilisant aussi que $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$) que

$$1 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_{m-1} \leq n + (m-1).$$

Par contre soit $(s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}$ telle que $1 \leq s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_{m-1} \leq n + m - 1$.

On peut résoudre itérativement (et uniquement) les équations

$$\begin{aligned} s_1 - 1 &= X_1 \\ s_2 - 2 &= X_1 + X_2 \\ s_3 - 3 &= X_1 + X_2 + X_3 \\ \ldots &= \ldots \\ s_{m-1} - (m-1) &= X_1 + X_2 + \ldots + X_{m-1} \\ n &= X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1} + X_m. \end{aligned}$$

Disons on obtient $(X_1, \ldots, X_m) = (r_1, \ldots, r_m)$. Alors $r_1 = s_1 - 1 \geq 0$, $r_2 = (r_1 + r_2) - r_1 = (s_2 - 2) - (s_1 - 1) = s_2 - s_1 - 1 \geq 0$.

Puis pour $1 \leq i < m$:

$$\begin{aligned} s_{i-1} - (i-1) &= r_1 + r_2 + \ldots + r_{i-1} \\ s_i - i &= r_1 + r_2 + \ldots + r_{i-1} + r_i \end{aligned}$$

montre $r_i = s_i - s_{i-1} - 1 \in \mathbb{N}$.

Et finalement

$$\begin{aligned} s_{m-1} - (m-1) &= r_1 + r_2 + \ldots + r_{m-1} \\ n &= r_1 + r_2 + \ldots + r_{m-1} + r_m \end{aligned}$$

montre $r_m = n - s_{m-1} + (m-1) \in \mathbb{N}$. Donc $(X_1, \ldots, X_m) = (r_1, \ldots, r_m)$ est une solution de $X_1 + \ldots + X_m = n$ où $X_i \in \mathbb{N}$ pour chaque i.

Soit Z_2 l'ensemble des solutions par des nombres naturels de l'equation $X_1 + \ldots + X_m = n$ et soit Z_4 l'ensemble des suites $(s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}$ telle que $1 \leq s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_{m-1} \leq n + m - 1$.

On vient de donner une fonction de Z_2 vers Z_4 avec sa fonction inverse. Donc ces fonctions sont des bijections. Il suit que $|Z_2| = |Z_4|$, et que les problèmes A1,A2,A3,A4,A5 ont tous la même solution.

Proposition 11.3. *La réponse aux problèmes A1, A2, A3, A4, A5 est*

$$C(n+m-1, n)$$

ou $C(n+m-1, m-1)$.

Démonstration. Nous venons de montrer que les solutions sont identiques. Et le dernier problème était déjà résolu. □

11.13. C'était du travail de montrer cette proposition, mais à partir de maintenant nous pouvons utiliser les réponses des cinq problèmes !

Exemple 11.12. Combien y a-t-il de façons de choisir quatre fruits dans un bol contenant des pommes, des oranges et des bananes, si l'ordre dans lequel ces fruits sont choisis n'importe pas, que seul le type de fruit et non pas le fruit en tant que tel importe et qu'il y a *au moins* quatre fruits de chaque catégorie dans le bol ?

Analyse : Nous pouvons utiliser problème A3. Les fruits dans le bol donnent un mult-ensemble sur l'ensemble $E := \{$ pomme, orange, banane $\}$ (de taille 3) et dont les multiplicités sont tous au moins quatre.

Un choix de quatre fruits, correspond à un sous-multi-ensemble de taille 4. Donc la réponse est $C(n+m-1, n)$, où $n = 4$, $m = 3$, c.-à-d,

$$C(4+3-1, 4) = C(6, 2) = 15.$$

Exemple 11.13. Combien de solutions de l'équation $X_1 + X_2 + X_3 = 5$ avec chaque $X_i \in \mathbb{N}$? Réponse : $C(5+3-1, 5) = C(7, 2) = 21$. Les triples solutionnaires (X_1, X_2, X_3) sont

$$(5,0,0), (4,1,0), (4,0,1), (3,2,0), (3,1,1), (3,0,2), (2,3,0),$$
$$(2,2,1), (2,1,2), (2,0,3), (1,4,0), (1,3,1), (1,2,2), (1,1,3),$$
$$(1,0,4), (0,5,0), (0,4,1), (0,3,2), (0,2,3), (0,1,4), (0,0,5).$$

Donc 21, en effet.

11.14. **Arrangements.** Nous proposons trois autres petits problèmes très similairs, avec des solutions similaires.

Problème (B1)**.** *Combien de mots différents peut-on former à partir des lettres du mots "aardvark" en utilsant toutes les lettres ?*[31]

31. Voir aussi [R, p. 274]

Soit E un ensemble et $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E^n$ une suite. Cette suite donne un multi-ensemble basé sur E avec fonction multiplicité f définie par $f(a) = r$ si $a \in E$ apparaît r fois dans la suite.

Problème (B2)**.** *Soit donné un multi-ensemble de taille n basé sur E, $|E| = m$, avec la fonction multiplicité $f : E \to \mathbb{N}$. Combien de suites dans E^n donnent ce multi-ensemble ?*

Problème (B3)**.** *Soit donné un commode avec ensemble de tiroirs $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ et n objets discernable. Fixons des nombres naturels $r_1, r_2, \ldots, r_m$ tels que $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$.*

Combien de façons de ranger les n objets, tel que tiroir t_i obtient exactement r_i de ces objets, pour chaque i ?

11.15. **Des liens entre ces problèmes.** (i) Soit A l'ensemble des lettres dans l'alphabet français. Alors les mots de longeurs 8 sont en bijection avec les suites de longeur 8 dans A^8 ; par exemple le mot "aardvark" est envoyé à la suite $(a, a, r, d, v, a, r, k) \in A^8$. Ça donne la fonction multiplicité sur l'alphabet : $f(a) = 3, f(r) = 2, f(d) = f(k) = f(v) = 1$ et la multiplicité de chaque autre lettre est 0, ça définit un multi-ensemble basé sur l'alphabet.

Chaque arrangement des lettres du mot "aardvark" utilise les mêmes lettres avec les même multiplicités, donc donne une suite avec le même multi-ensemble. Et une suite qui donne ce multi-ensemble correspond à un arrangement du mot "aardvark". Par exemple "varkaard" correspond à la suite (v, a, r, k, a, a, r, d).

Il y a donc une bijection.

Si les tiroirs sont étiquettés par les lettres de l'alphabet, et on veut ranger les 8 objets $x_1, \ldots, x_8$, tel que trois objets dans tiroir a, deux dans tiroir r, un dans les tiroirs d, k et v et rien dans les autres. Dans ce cas, un exemple est donné par la fonction placement

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ v & a & r & k & a & a & r & d \end{pmatrix}$$

(on range x_1 dans le tiroir v, x_2 dans a etecetera).

Il y a donc une autre bijection.

Proposition 11.4. *(i) La solution de B1 est $\frac{8!}{3!2!}$.*

(ii) Disons $E = \{y_1, \ldots, y_m\}$ est une énumération des élément de E, et posons $r_i = f(y_i)$. Alors la solution de B2 est $\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_m!}$.

(iii) La solution de B3 est $\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_m!}$.

Démonstration. (i) Solution de B3 : commencer par choisir les r_1 objets à ranger dans tiroir 1 (le nombre est $C(n, r_1)$), et puis choisir parmi les $n - r_1$ restant les r_2 objets à ranger dans tiroir 2 (le nombre est $C(n - r_1, r_2)$), et puis choisir parmi les $n - r_1 - r_2$ restant les r_3 objets à ranger dans tiroir 3, et cetera. Par le principe multiplicatif la réponse est

$$C(n, r_1)C(n - r_1, r_2)C(n - r_1 - r_2, r_3) \cdots C(n - (r_1 + \ldots + r_{m-1}), r_m) =$$

$$= \frac{n!}{r_1!(n-r_1)!}\frac{(n-r_1)!}{r_2!(n-r_1-r_2)!}\frac{(n-r_1-r_2)!}{r_3!(n-r_1-r_2-r_3)!}\cdots = \frac{n!}{r_1!r_2!r_3!\ldots r_m!}$$

(ii) Soit $y_1, \ldots, y_m$ une énumération fixé des élements de E. Définissons $r_i = f(y_i)$. La solution de B2 est nécessairement similaire : commence par choisir les r_1 endroits dans la suite pour placer les y_1 (le nombre est $C(n, r_1)$), et puis choisir parmi les $n-r_1$ restant les r_2 endroits pour placer les y_2 (le nombre est $C(n-r_1, r_2)$), et puis choisir parmi les $n-r_1-r_2$ restant les r_3 endroits pour placer les y_3, et cetera. □

Encore une fois, problème B1/B2 reformulé :

Proposition 11.5. *Le nombre de différentes permutations de n objets, où il y a r_1 objets indiscernable de type* 1*, r_2 objets indiscernables de type* 2*, ..., et r_m objets indiscernables de type m est*[32]

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_m!}$$

Encore une fois, problème B3 reformulé :

Proposition 11.6. *Le nombre de façons de distribuer n objets discernables dans m boîtes discernables, de manière telle que r_i objets sont rangés dans la boîte i, $i = 1, 2, \ldots, m$ est égal à*[33]

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_m!}$$

Exemple 11.14. Combien de façons de distribuer à quatre joueurs distinguable une main de treize cartes chacun ? Réponse $\frac{52!}{13!13!13!13!}$.

11.16. **Solutions sous autres conditions.** Considerons les deux problèmes suivants.

Problème (C1)**.** *Combien de façons de résoudre l'équation*

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 25,$$

avec $X_i \in \mathbb{Z}$, tels que

$$X_1 \geq 3;\;\; X_2 \geq 4;\;\; X_3 \geq -5;\;\; X_4 \geq 0 \;?$$

Problème (C2)**.** *Combien de façons de résoudre l'équation*

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 23,$$

avec $X_i \in \mathbb{N}$?

Premièrement : nous connaissons déjà la réponse à C2, c'est $C(23+4-1, 4-1) = C(26, 3) = 2600$. Puis nous allons montrer par un substitution de variables que C1 et C2 ont la même solution.

32. Voir [R, p.275]
33. Voir [R, p.276]

11.17. Soit $(X_1, X_2, X_3, X_4) = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ une solution pour C1.

Posons

$$s_1 = r_1 - 3;\ s_2 = r_2 - 4;\ s_3 = r_3 + 5;\ s_4 = r_4$$

alors

$$r_1 = s_1 + 3;\ r_2 = s_2 + 4;\ r_3 = s_3 - 5;\ r_4 = s_4$$

Et

$$\begin{aligned} r_1 \geq 3 &\iff s_1 \geq 0 \\ r_2 \geq 4 &\iff s_2 \geq 0 \\ r_3 \geq -5 &\iff s_3 \geq 0 \\ r_4 \geq 0 &\iff s_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Et

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 25,$$

si et seulement si

$$(s_1 + 3) + (s_2 + 4) + (s_3 - 5) + (s_4) = 25,$$

ou

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 25 - 3 - 4 + 5 = 23.$$

Conclusion : $(X_1, X_2, X_3, X_4) = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ est une solution de

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 25,$$

avec $X_i \in \mathbb{N}$, tels que

$$X_1 \geq 3;\ X_2 \geq 4;\ X_3 \geq -5;\ X_4 \geq 0$$

si et seulement si
$(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) - (s_1, s_2, s_3, s_4)$ est une solution de

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 23,$$

avec $Y_i \in \mathbb{N}$.

Une bijection !

Donc les réponses des problèmes C1 et C2 sont égales, en effet :

$$C(23 + 4 - 1, 23) = C(26, 23) = C(26, 3) = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2600.$$

11.18. **Principe d'Inclusion-Exclusion.** Avant de continuer de résoudre d'autres problèmes de comptage, nous devons discuter une version plus générale du principe de la somme, mais plus compliqué.

Pour le principe de la somme, qu'est-ce qu'il faut faire si les deux tâches ne sont pas indépendantes ? Voir partie (i) du théorème [34] suivant.

Théorème 11.1. *Soit U un ensemble, et A_1, $A_2, \ldots$ des sous-ensembles finis.*

(i) On a

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

(ii) On a

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = (|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

(iii) Généralement $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s|$ est égal à

$$\sum_{r=1}^{s} (-1)^{r-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq s} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}| \right).$$

La partie (iii) formulé en mots :

La taille de la réunion d'un certain nombre d'ensembles est la somme des tailles de ces sous-ensembles, moins les tailles de toutes les intersections de deux ensembles, plus les tailles de toutes les intersections de trois ensembles, moins les tails de toutes les intersections de quatre ensembles, plus ....

Démonstration. (i) Chaque élément de $A_1 \cup A_2$ est soit dans A_1 soit dans $A_2 - A_1$, mais jamais dans les deux simultanément. Donc $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2 - A_1|$. Chaque élément de A_2 est soit dans $A_2 - A_1$ soit dans $A_1 \cap A_2$, mais jamais dans les deux simultanément. Donc $|A_2| = |A_2 - A_1| + |A_1 \cap A_2|$. En combinant les deux formules donne (i).

(ii) Par (i) il suit

$$|(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)| = |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

et aussi

$$\begin{aligned}
|(A_1 \cup A_2) \cup A_3| &= |(A_1 \cup A_2)| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3| \\
&= (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|) + |A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3| \\
&= (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|) + |A_3| - (|A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\
&= (|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.
\end{aligned}$$

(iii) [35] Sera donné dans un appendix. □

34. Voir [R, p. 321]

35. La preuve de (iii) ne fait pas partie de matière d'examen et se trouvera dans un appendix.

Exemple 11.15. Combien de nombres naturels positifs n existent-t-ils, tels que $1 \leq n \leq 1200$ et n est relativement premier avec 1200 ?

On a $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$, donc n et 1200 sont relativement premier si $2 \not| n$ et $3 \not| n$ et $5 \not| n$.

Let E_m l'ensemble des nombres naturels n tels que $1 \leq n \leq 1200$ et $m|n$. Nous voulons connaître $|E_1 - (E_2 \cup E_3 \cup E_5)| = |E_1| - |E_2 \cup E_3 \cup E_5|$. Nous avons $E_2 \cap E_3 = E_6$,$E_2 \cap E_5 = E_{10}, \ldots,$ $E_2 \cap E_3 \cap E_5 = E_{30}$. Et $|E_i| = \frac{120}{i}$ si $i|1200$. Donc par inclusion-exclusion

$$\begin{aligned}
|E_2 \cup E_3 \cup E_5| &= (|E_2| + |E_3| + |E_5|) - (|E_6| + |E_{10}| + |E_{15}|) + |E_{30}| \\
&= (\frac{1200}{2} + \frac{1200}{3} + \frac{1200}{5}) - (\frac{1200}{6} + \frac{1200}{10} + \frac{1200}{15}) + \frac{120}{30} \\
&= (600 + 400 + 240) - (200 + 120 + 80) + 40 \\
&= 880
\end{aligned}$$

Donc la réponse est $1200 - 880 = 320$.

11.19. **Combien de sous-multi-ensembles d'un taille fixé.** Nous continuons de discuter des exemples de problèmes de dénombrement. Considérons les 4 problèmes suivants.

Problème (D1). *Combien y a-t-il de façons de choisir cinq fruits dans un bol contenant trois pommes, sept oranges, six bananes et quatre citrons, si l'ordre dans lequel ces fruits sont choisis n'importe pas, que seul le type de fruit et non pas le fruit en tant que tel importe ?*

Problème (D2). *Combien de façons de résoudre l'équation*

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 5,$$

avec $X_i \in \mathbb{N}$*, tels que*[36]

$$0 \leq X_1 \leq 3;\ \ 0 \leq X_2 \leq 6;\ \ 0 \leq X_3 \leq 7;\ \ 0 \leq X_4 \leq 4$$

Problème (D3). *Combien de sous-multi-ensembles de taille* 5 *existent-t-ils du multi-ensemble avec fonction multiplicité*

$$\{2^3, 3^6, 5^7, 7^4\} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix},$$

basé sur l'ensemble $\{2, 3, 5, 7\}$ *?*

Problème (D4). *Soit un commode donné avec quatre tiroirs (distinguables). Combien de façons de ranger* 5 *objets* indistinguable*, si tiroir* 1 *peut contenir au maximum* 3 *objets, si tiroir* 2 *peut contenir au maximum* 6 *objets, si tiroir* 3 *peut contenir au maximum* 7 *objets, si tiroir* 4 *peut contenir au maximum* 4 *objets ?*

36. Voir aussi [R, p. 324]

11.20. Le choix de fruits *ppoob* pour D1, correspond à la solution $(X_1, X_2, X_3, X_4) = (2, 2, 1, 0)$ car $2 + 2 + 1 + 0 = 5$) pour D2 et au sous-multi-ensemble $\{2^2, 3^2, 5^1, 7^0\}$ de D3 et au rangement de 2 objets dans tiroir 1, 2 objets dans tiroir 2, un dans tiroir 4 et rien dans tiroir 4.

Ce sont des bijections !

Les problèmes D1, D2, D3, D4 ont tous la même réponse. Même si nous ne connaissons pas encore cette réponse !

Il suffit de résoudre un des problèmes, disons D2 :

Soit U la collection des solutions de $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 5$ et chaque $X_i \in \mathbb{N}$. Donc automatiquement chaque $X_i \leq 5$! Soit A la collection des solutions de $X_1+X_2+X_3+X_4 = 5$ et chaque $X_i \in \mathbb{N}$ et $X_1 \geq 4$. Soit B la collection des solutions de $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 5$ et chaque $X_i \in \mathbb{N}$ et $X_4 \geq 5$. Alors $U - (A \cup B)$ est la collection des solutions de $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 5$ et chaque $X_i \in \mathbb{N}$ et $X_1 \leq 3$ et $X_4 \leq 4$.

Par le principe d'inclusion-exclusion nous cherchons

$$|U - (A \cup B)| = |U| - |A \cup B| = |U| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Nous avons une formule générale qui s'applique ici : $|U| = C(5 + 4 - 1, 5)$.

$|A| = 4$, par énumération, car les solutions permises sont (X_1, X_2, X_3, X_4) égal à $(5, 0, 0, 0)$, $(4, 1, 0, 0)$, $(4, 0, 1, 0)$, $(4, 0, 0, 1)$ $|B| = 1$, car $(0, 0, 0, 5)$ est la seule solution avec $X_4 \geq 5$. $|A \cap B| = 0$.

La réponse totale pour chacun des problèmes D1,D2,D3,D4 est :

$$C(8, 5) - 4 - 1 + 0 = 56 - 5 = 51.$$

11.21. **Généralisations.** Formulons en termes générales :

Problème (Type C)**.** *Combien de solutions entières de l'équation*

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_m = n$$

si $X_1 \geq r_1, X_2 \geq r_2, \ldots, X_d \geq r_m$ *(où les* r_i *sont des entiers).*

Réponse : Comme en problème (C1) : $C(n + m - (r_1 + r_2 + \ldots + r_m) - 1, m - 1)$.

Problème (Type D)**.** *Combien de solutions entières de l'équation*

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_m = n$$

si $0 \leq X_1 \leq r_1, 0 \leq X_2 \leq r_2, \ldots, 0 \leq X_d \geq r_m$ *(où les* r_i *sont des nombres naturels) ?*

Méthode de répondre avec le principe d'inclusion-exclusion (un peu plus tard suivra une méthode en utilisant les fonctions génératrices) : Soit U l'ensemble des solutions entières de l'équation

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_m = n$$

où on exige seulement que $X_i \in \mathbb{N}$ pour chaque i. Pour chaque i, $1 \leq i \leq m$, définissons $U_i \subseteq U$ comme le sous-ensemble des solutions où $X_i \geq r_i + 1$ (donc on exige seulement une extra condition).

Donc $U - (U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_m)$ est l'ensemble des solutions qui satisfont aucune des conditions $X_i \geq r_i + 1$; c'est l'ensemble qui nous intéresse ! Nous cherchons

$$|U| - |U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_m|.$$

On sait déjà que $|U| = C(n + m - 1, m - 1)$ et par le problème précédent

$$|U_i| = C(n + m - (r_i + 1) - 1, m - 1),$$

mais ça ne suffit pas encore pour compter $|U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_m|$. Nous pouvons utiliser le principe d'inclusion-exclusion, mais pour ça de bien fonctionner il faut savoir compter les tailles des multiples intersections. Nous pouvons !

L'intersection de s des sous-ensembles U_i est quoi ? Si $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leq m$ alors $U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \ldots \cap U_{i_s}$ est l'ensemble des solutions qui satisfont les s conditions :

$$X_{i_1} \geq r_{i_1} + 1,\ X_{i_2} \geq r_{i_2} + 1, \ldots,\ X_{i_s} \geq r_{i_s} + 1.$$

Le nombre de telles solutions est compté dans le problème précédent :

$$C(n + m - (r_{i_1} + r_{i_2} + \ldots + r_{i_s} + s) - 1, m - 1).$$

Avec le principe d'inclusion-exclusion nous pouvons en principe résoudre le problème.

Disons pour $m = 3$ la réponse totale est

$$C(n + m - 1, m - 1) -$$

$$-(C(n+m-(r_1+1)-1, m-1) + C(n+m-(r_2+1)-1, m-1) + C(n+m-(r_3+1)-1, m-1)) +$$

$$+(C(n+m-(r_1+r_2+2)-1,m-1)+C(n+m-(r_1+r_3+2)-1,m-1)+C(n+m-(r_2+r_3+2)-1,m-1))+$$
$$-C(n+m-(r_1+r_2+r_3+3)-1,m-1).$$

On posé ici $C(p,q)=0$ si $p<q$.

Ou la réponse totale dans le cas général :

$$\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\left(\sum_{0\leq i_1<i_2<\ldots<i_s\leq m} C(n+m-(r_{i_1}+r_{i_2}+\ldots+r_{i_d})-1,d-1)\right).$$

Ici, la notation $\sum_{0\leq i_1<i_2<\ldots<i_s\leq m}$ veut dire : "prendre la somme sur toutes les possibilités des $i_a\in\mathbb{N}$ $(1\leq a\leq s)$ telles que $0\leq i_1<i_2<\ldots<i_s\leq m$".

12. Suites et récurrences linéaires

12.1. **Suites et séries.** Les suites de nombres (entiers, réels ou mêmes complexes)

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

jouent un grand rôle dans les mathématques, en particulier dans les problèmes de comptage. On peut considérer une suite de nombres réels comme une fonction $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, où $F(i) = a_i$, et vice versa.

La considération des suites (et des séries associées) pour nous, dans les mathématiques discrètes, sera de donner un alternatif pour le principe d'inclusion-exclusion que nous venons de voir ; pour un exemple typique, voir §12.5.

12.1.1. *Exemple : Trois suites en comptage.* Fixons E un ensemble fini avec m éléments.

Si a_n est le nombre des n-permutations *avec remise* dans E, la suite est

$$1, m, m^2, m^3, \ldots, m^n, \ldots..$$

Si a_n est le nombre des n-combinaisons *avec remise* dans E, la suite est

$$1, m, \frac{(m+1)m}{2!}, \frac{(m+2)(m+1)m}{3!}, \ldots, C(n+m-1, n), \ldots$$

Si a_n est le nombre des n-combinaisons *sans remise* dans E, la suite est

$$1, m, \frac{m(m-1)}{2!}, \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}, \ldots, C(m,n), \ldots, C(m,m), 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$$

parce que $a_n = 0$ si $n > m$.

12.2. **Les suites dans un cours de calcul.** Dans un cours de calcul ou d'analyse mathématique on introduit aussi *la série*

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

associée à une suite $(a_i)_{i \geq 0}$. Puis on considère la question pour quelles valeurs de x cette suite est convergente (ce que nous n'allons pas faire dans ce cours). Supposons la série converge pour *toutes* les valeurs de x sur un (possiblement très petit) intervalle ouvert $(-\epsilon, \epsilon)$, disons avec valeur $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

Alors $f : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ est une jolie fonction (une *"fonction analytique"*). En particulier toutes les fonctions dérivées de f existent. On appelle f une *fonction génératrice*[37] pour la suite. Par le théorème de Taylor-Maclaurin, on peut *retrouver* les a_i en termes de cette fonction :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

où $f^{(n)}(0)$ est la n-ième fonction dérivée de f évalué en $x = 0$.

37. Voir aussi [R, Annexe 3]

Par contre, si $g : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ est une jolie fonction, on obtient une suite $b_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$ et la série associée est appelée la suite (ou la développement) de Maclaurin de g.

Dans un cours de calcul on montre le suivant. Supposons que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est la suite de Maclaurin de f. Alors

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$$

(=(la dérivé de la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$) est la série de Maclaurin de la fonction dérivée f'.

Supposons aussi que $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ est la série de Maclaurin de g et $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$ la série de Maclaurin du produit $f \cdot g$. Alors

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}.$$

On conclut qu'on multiplie les deux series comme on multiplierait deux polynômes (de très haut degré).

La fonction 0 est la *seule* fonction jolie ("analytique") sur un petit intervalle de 0 qui a série de Macalaurin $\sum_{n\geq 0} 0x^n = 0$. Les fonctions rationnelles $\frac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux fonctions polynômiales et $Q(0) \neq 0$, sont des fonctions jolies ("analytiques") restraintes sur un petit intervalle ouvert de 0 (où $Q(x)$ n'est pas 0).

Acceptons ces faits.

Pour des suites qui nous intéressent essayons d'abord de trouver une fonction génératrice.

12.3. **Fonction génératrice des n-combinaisons sans remise.** Les séries les plus faciles sont ceux qui deviennent 0 à partir d'un certain point. La série devient une fonction polynomiale, qui est certainement jolie. Si la suite est

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$$

la fonction (et la série) est

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_{m-1}x^{m-1} + a_m x^m.$$

Et encore

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Donnons une application de cette formule.

Commençons, par exemple, avec le polynôme $g(x) = (x+1)^m$. Il y a une suite associée avec $a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$. Nous pouvons facilement dériver (et montrer par induction sur n) :

$$g^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(x+1)^{m-n},$$

donc

$$a_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} = C(m,n).$$

Donc $(x+1)^m$ est une fonction génératrice de la suite

$$C(m,0), C(m,1), \ldots, C(m,n), \ldots, C(m,m), 0, 0, 0, 0, \ldots$$

$$(x+1)^m = \sum_{n=0}^{m} C(m,n)x^n.$$

Théorème 12.1 (Théorème du binôme de Pascal)**.** *Si* $m \in \mathbb{N}$ *alors*

$$(X+Y)^m = \sum_{n=0}^{m} C(m,n)X^nY^{m-n}.$$

Démonstration. Dans l'identité $(x+1)^m = \sum_{n=0}^{m} C(m,n)x^n$, remplacer x par $\frac{X}{Y}$ et puis multiplier les deux côtés par Y^m. Puis simplifier les fractions. □

Corollaire 12.1. *Si* $m \in \mathbb{N}$ *alors*
(i) $2^m = \sum_{n=0}^{m} C(m,n)$,
(i) $0 = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n C(m,n)$,
(i) $3^m = \sum_{n=0}^{m} C(m,n)2^n$

Démonstration. Faire des substitutions $(X,Y) = (1,1)$, $(-1,1)$, $(2,1)$ respectivement. □

12.3.1. *Nouvelle preuve de l'identité de Pascal.* Nous pouvons remontrer les identités de Pascal et de Vandermonde en utilisant des simples outils de calcul. Par exemple

$$\begin{aligned}
(x+1)^{m+1} &= (x+1)(x+1)^m \\
&= (x+1)\sum_{i=0}^{m} C(m,i)x^i \\
&= \sum_{i=0}^{m} C(m,i)x^{i+1} + \sum_{i=0}^{m} C(m,i)x^i \\
&= \sum_{i=1}^{m+1} C(m,i-1)x^i + \sum_{i=0}^{m} C(m,i)x^i \\
&= C(m,0) + \sum_{i=1}^{m} C(m,i-1)x^i + \sum_{i=1}^{m} C(m,i)x^i + C(m,m)x^{m+1} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{m} (C(m,i-1) + C(m,i))x^i + x^{m+1}
\end{aligned}$$

En comparant avec

$$(x+1)^{m+1} = \sum_{i=0}^{m+1} C(m+1,i)x^i$$

on obtient l'identité de Pascal

$$C(m+1,i) = C(m,i-1) + C(m,i)$$

si $1 \leq i \leq m$.

Essayer vous-même de remontrer l'identité de Vandermonde en utiisant $(x+1)^n(x+1)^m = (x+1)^{m+n}$.

12.4. **Fonction génératrice des n-combinaisons avec remise.** Soit $f = \frac{1}{1-x}$. Il est facile de montrer par induction sur n que

$$\left[\frac{1}{1-x}\right]^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

La suite de Maclaurin associée à $f = \frac{1}{1-x}$ a le terme

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

La suite est donc $1, 1, 1, 1, 1, 1 \ldots$ et la série $\sum_{i \geq 0} x^i$.

En prenant la $(m-1)$-ième fonction dérivé de f et de $\sum_{i \geq 0} x^i$ on obtient que la série de $\frac{(m-1)!}{(1-x)^m}$ est

$$\sum_{n \geq 0} (m+n-1)(m+n-2)\ldots(n+1)x^n.$$

Et donc la série de Maclaurin de $\frac{1}{(1-x)^m}$ est

$$\sum_{i \geq 0} \frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots(n+1)}{(m-1)!} x^n = \sum_{i \geq 0} (C(m+n-1, n)x^n.$$

Donc $\frac{1}{(1-x)^m}$ est une fonction génératrice de la suite

$$1, C(m,1), C(m+1,2), C(m+2,3), C(m+3,4), \ldots, C(m+n-1,n), \ldots$$

On peut calculer la série de Macalaurin de $\frac{1}{(1-x)^m}$ d'une autre façon. La série de $\frac{1}{1-x}$ est $\sum_{i \geq 0} x^i$. Il suit de

$$\begin{aligned} (\sum_{i \geq 0}^{\infty} x^i)^m &= \sum_{r_1 \geq 0} x^{r_1} \sum_{r_2 \geq 0} x^{r_2} \cdots \sum_{r_m \geq 0} x^{r_m} \\ &= \sum_{r_1 \geq 0} \sum_{r_2 \geq 0} \cdots \sum_{r_m \geq 0} x^{r_1 + r_2 + \ldots + r_m} \end{aligned}$$

que le coefficient de x^n de $\frac{1}{(1-x)^m}$ est égal au nombre des $(r_1, r_2, \ldots, r_m) \in \mathbb{N}^m$ tel que

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n.$$

Nous venons de voir que ce coefficient de x^m est $C(n+m-1, n)$. Conclusion : le nombre des solutions par des nombres naturels de l'équation $X_1 + X_2 + \ldots + X_m = n$ est $C(n+m-1, n)$.

Nous le savions déjà, mais ainsi nous avons donné une *autre* preuve.

12.5. **Autre solution de problèmes de type C ou D.** Motivé par le dernier calcul revisitons un problème d'un type connu, que nous avions résolu avec l'aide du principte d'inclusion-exclusion.

Problème. *Combien de solutions entières de l'équation* $X_1 + X_2 + X_3 = 12$ *si* $2 \leq X_1 \leq 7$, $1 \leq X_2 \leq 8$, $2 \leq x_3 \leq 5$ *?*

Problème. *Considérons la fonction*

$$f(x) = (x^2 + x^3 + \ldots + x^7)(x + x^2 + \ldots + x^8)(x^2 + \ldots + x^5)$$

C'est quoi le coefficient de x^{12} ?

Calculons :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{r_1=2}^{7} x^{r_1} \sum_{r_2=1}^{8} x^{r_2} \sum_{r_3=2}^{5} x^{r_3} \\ &= \sum_{2\leq r_1\leq 7}\ \sum_{1\leq r_2\leq 8}\ \sum_{2\leq r_3\leq 5} x^{r_1+r_2+r_3} \end{aligned}$$

Donc le coefficient de x^{12} est égal au nombre des $(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{N}^3$ tel que

$$r_1 + r_2 + r_3 = 12$$

et $2 \leq r_1 \leq 7$, $1 \leq r_2 \leq 8$ et $2 \leq r_3 \leq 5$. Donc les deux problèmes ont la même réponse.

Nous allons résoudre ces problèmes en utilisant d'un calcul simple, en utilisant que

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^d = \frac{(1 - x^{d+1})}{1 - x},$$

si $|x| < 1$.

$$\begin{aligned} f &= (x^2 + x^3 + \ldots + x^7) \cdot (x + x^2 + \ldots + x^8) \cdot (x^2 + \ldots + x^5) \\ &= x^2(1 + x + \ldots + x^5) \cdot x(1 + x + \ldots + x^7) \cdot x^2(1 + x + \ldots + x^3) \\ &= x^5 \cdot (1 + x + \ldots + x^5) \cdot (1 + x + \ldots + x^7) \cdot (1 + x + \ldots + x^3) \\ &= x^5 \cdot \frac{(1 - x^6)}{1 - x} \cdot \frac{(1 - x^8)}{1 - x} \cdot \frac{(1 - x^4)}{(1 - x)} \\ &= x^5 \cdot \frac{1 - (x^4 + x^6 + x^8) + (x^{10} + x^{12} + x^{14}) - x^{18}}{(1 - x)^3} \\ &= \frac{x^5 - (x^9 + x^{11} + x^{13}) + (x^{15} + x^{17} + x^{19}) - x^{23}}{(1 - x)^3} \end{aligned}$$

Nous savons que le coefficient de x^r de $\frac{1}{(1-x)^3}$ est $C(r + 2, 2)$. Donc le coefficient de x^r de $\frac{x^s}{(1-x)^3}$ est $C(r - s + 2, 2)$.

Donc le coefficient de x^{12} dans f est

$$C(14 - 5, 2) - [C(14 - 9, 2) + C(14 - 11, 2) + 0] + [0 + 0 + 0] - 0 = 36 - [10 + 3] = 23.$$

Et voilà la réponse des deux problèmes.

12.6. **Exemple pour trouver une fonction génératrice.**

Problème. *Trouver une fonction génératrice pour la suite*

$$0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, \ldots$$

avec terme général : $a_n = n + n^2$.

Pour commencer, la fonction $\frac{1}{(1-x)}$ a série de Maclaurin $\sum_{n\geq 0} x^n$. Donc sa dérivé $\frac{1}{(1-x)^2}$ a série $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ et $\frac{x}{(1-x)^2}$ a la série

$$\sum_{n\geq 1} nx^n = \sum_{n\geq 0} nx^n.$$

Puis, la dérivé de $\frac{x}{(1-x)^2}$ est $\frac{1+x}{(1-x)^3}$, qui a donc la suite $\sum_{n\geq 0} n^2x^{n-1}$. Et $\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$ a la série

$$\sum_{n\geq 0} n^2x^n.$$

Finalement la fonction $\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x+x^2}{(1-x)^3} = \frac{2x}{(1-x)^3}$ a série de Maclaurin

$$\sum_{n\geq 0} (n + n^2)x^n.$$

Conclusion : une fonction génératrice de la suite est

$$\frac{2x}{(1-x)^3}.$$

Vérification : Nous savons déjà que la série de Maclaurin $\frac{1}{(1-x)^3}$ est

$$\sum_{n\geq 0} C(n+2, 2)x^n.$$

Donc la série de $\frac{2x}{(1-x)^3}$ est

$$\sum_{n\geq 0} 2C(n+2, 2)x^{n+1} = 0 + \sum_{n\geq 1} 2C(n+1, 2)x^n.$$

Et $2C(n+1, 2) = 2\frac{(n+1)n}{2} = n + n^2$.

Ça fonctionne, en effet !

13. Récurrence linéaire

Nous avons déjà rencontré la suite de Fibonacci, et des variations. Soit

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

une suite de nombres (entiers, réels ou complexes). Nous allons dire que la suite satisfait une récurrence linéaire de degré d, s'il existe d nombres $c_1, \ldots, c_d$, $c_d \neq 0$ tel que pour chaque $n \geq N$ (pour un certain $N \geq d$)

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_d a_{n-d}.$$

Si on connaît cette récurrence et seulement le début de la suite $a_0, \ldots, a_{N-1}$, on peut retrouver les autres coefficients.

Dans ce cas il est possible de trouver une fonction génératrice, qui est une fonction rationnelle de la forme

$$f(x) = \frac{p(x)}{1 - c_1 x - c_2 x^2 - \ldots - c_d x^d}$$

ou $p(x)$ est un polynôme de degré N au maximum. Nous allons faire ça pour des petits d.

13.1. **Degré un.** Commençons par le cas de degré un : il existe un nombre c tel que $a_n = c a_{n-1}$, $n \geq 1$. Alors $a_1 = c a_0$, $a_2 = c a_1 = c^2 a_0$, et en général $a_n = c^n a_0$. La suite est

$$a_0, c a_0, c^2 a_0, c^3 a_0, \ldots$$

La fonction génératrice est donc

$$\frac{a_0}{1 - cx}.$$

Remarque. Une récurrence du type $a_n = c a_{n-1} + d$, $n \geq 1$, n'est pas appelé récurrence linéaire, mais on peut analyser de façon analogue. Supposons f est une fonction génératrice, alors son expansion de Maclaurin est

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

et celui de $(1 - cx) f(x)$ est

$$\begin{aligned}
(1 - cx) \sum_{n \geq 0} a_n x^n &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 0} (-c a_n) x^{n+1} \\
&= \sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 1} (-c a_{n-1}) x^n \\
&= a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n - c a_{n-1}) x^n \\
&= a_0 + \sum_{n \geq 1} d x^n \\
&= a_0 - d + d\Big(\sum_{n \geq 0} x^n\Big)
\end{aligned}$$

Donc $(1 - cx) f = a_0 - d + \frac{d}{1-x} = \frac{a_0 - a_0 x - d + dx + d}{1-x}$ et $f = \frac{a_0 + x(d - a_0)}{(1-x)(1-cx)}$.

13.2. **Degré deux.** Soit

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

une suite de nombres (entiers, réels ou complexes), satisfaisant la récurrence linéaire de degré deux :

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

si $n \geq 2$. Ici c_1 et c_2 sont deux nombres fixés (et on suppose $c_2 \neq 0$).

À partir de a_0 et a_1 et la récurrence on peut calculer tous les a_n. Mais avec cette méthode, pour obtenir la valeur de a_n, il faut calculer successivement *tous* les a_i pour $2 \leq i \leq a_n$! Maintenant nous allons donner une formule de a_n qui n'a pas cette désavantage. Quelque préparations sont nécessaires.

Considérons l'équation $X^2 = c_1 X + c_2$ (ou $X^2 - c_1 X - c_2 = 0$). Il y aura deux cas à considérer, le premier cas est quand cette équation a deux solutions différentes, et le deuxième cas est quand il y a *une seule* solution. Il y a deux racines différentes si et seulement si $c_1^2 + 4c_2 \neq 0$.

Cas 1 : Supposons il y a deux racines différentes. Ce sont

$$r_1 = \frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 + 4c_2}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4c_2}}{2}.$$

En particulier $r_2 - r_1 = \sqrt{c_1^2 + 4c_2}$. Ces racines ne sont pas des nombres réels (mais encore des nombres complexes) si $c_1^2 + 4c_2 < 0$.

Considérons le système d'équations linéaires :

$$X_1 + X_2 = a_0, \; r_1 X_1 + r_2 X_2 = a_1.$$

Il y a une unique couple de solution (z_1, z_2) (parce que $r_1 \neq r_2$) ; en fait on vérifie facilement

$$z_1 = \frac{r_2 a_0 - a_1}{r_2 - r_1} \text{ et } z_2 = -\frac{r_1 a_0 - a_1}{r_2 - r_1}.$$

Nous pouvons maintenant formuler la formule générale dans ce cas **1** [38]. Pour chaque $n \geq 0$ on a :

$$a_n = z_1 r_1^n + z_n r^n.$$

Cas 2 : Supposons il y a une seule racine. C'est $r = \frac{c_1}{2}$. Nous supposons $c_2 \neq 0$, donc aussi $c_1 \neq 0$ (parce que $c_1^2 + 4c_2 = 0$ dans ce cas 2) et $r \neq 0$.

Considérons le système d'équations linéaires :

$$X_1 = a_0, \; r X_1 + r X_2 = a_1.$$

Il y a une unique couple de solution (z_1, z_2) ; en fait on vérifie facilement

$$z_1 = a_0 \text{ et } z_2 = \frac{-r a_0 + a_1}{r}.$$

38. Voir aussi [R, th. 1, p. 303]

Nous pouvons maintenant formuler la formule générale dans ce cas **2** [39]. Pour chaque $n \geq 0$ on a :

$$a_n = z_1 r^n + n z_2 r^n.$$

13.3. **Exemples.** (i) Trouver une formule pour les nombres de Fibonacci. $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ et $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$. L'équation $X^2 = X + 1$ a deux racines : $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $r_2 - r_1 = \sqrt{5}$. Trouver la solution (z_1, z_2) de

$$X_1 + X_2 = 0,\ r_1 X_1 + r_2 X_2 = 1.$$

$$z_1 = \frac{-1}{\sqrt{5}} \ \text{ et } \ z_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

La solution générale :

$$F(n) = z_1 r_1^n + z_n r^n = \frac{-1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Avec un ordinateur j'ai calculé la partie droite pour $n = 30$, avec comme résultat 832039.9882. Mais nécessairement le calcul avec des nombres réels sur un ordinateur est un peu inprécis. La vraie réponse est $F(30) = 832040$.

(ii) Trouver une formule pour la suite $(a_i)_{i \geq 0}$:

$$1, 6, 27, 108, \ldots$$

ayant la récurrence

$$a_n = 6a_{n-1} - 9an - 2$$

si $n \geq 2$. L'équation

$$X^2 = 6X - 9$$

a une seule racine $r = 3$. Trouver la solution (z_1, z_2) de

$$X_1 = 1,\ rX_1 + rX_2 = 6.$$

C'est

$$z_1 = 1 \text{ et } z_2 = \frac{-3+6}{3} = 1.$$

La solution générale :

$$a_n = 3^n + n3^n = (n+1)3^n$$

39. Voir aussi [R, th. 2, p. 306]

13.4. **Preuve par induction.**

Démonstration du cas 1. Remarquons d'abord que $r_1^2 = c_1 r_1 + c_2$ et $r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$.

Montrons par induction que la fonction propositionnelle $P(n) :=$ "$a_n = z_1 r_1^n + z_2 r_2^n$" est vraie pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Début : $n = 0, 1$: $z_1 r_1^0 + z_2 r_2^0 = z_1 + z_2 = a_0$ et $z_1 r_1^1 + z_2 r_2^1 = z_1 r_1 + z_2 r_2 = a_1$ par définition et construction de z_1, z_2.

Étape d'induction (généreuse). Soit $n \geq 1$ et supposons que $P(n)$ et $P(n-1)$ sont vraies, c.-à-d., $a_n = z_1 r_1^n + z_2 r_2^n$ et $a_{n-1} = z_1 r_1^{n-1} + z_2 r_2^{n-1}$. Alors

$$\begin{aligned}
z_1 r_1^{n+1} + z_2 r_2^{n+1} &= z_1 r_1^{n-1} r_1^2 + z_2 r_2^{n-1} r_2^2 \\
&= z_1 r_1^{n-1}(c_1 r_1 + c_2) + z_2 r_2^{n-1}(c_1 r_2 + c_2) \\
&= c_1(z_1 r_1^n + z_2 r_2^n) + c_2(z_1 r_1^{n-1} + z_2 r_2^{n-1}) \\
&= c_1 a_n + c_2 a_{n-1} \text{ (hyp. d'induction)} \\
&= a_{n+1} \text{ (récurrence des } a_i\text{)}
\end{aligned}$$

et donc $P(n+1)$ est aussi vraie.

On conclut la preuve par le principe d'induction. □

Démonstration du cas 2. Remarquons d'abord que $r = \frac{c_1}{2}$, $r^2 = c_1 r + c_2$ et que $r c_1 + 2c_2 = 0$. Montrons par induction que la fonction propositionnelle $P(n) :=$ "$a_n = z_1 r^n + n z_2 r^n$" est vraie pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Début : $n = 0, 1$: $z_1 r^0 + 0 \cdot z_2 r^0 = z_1 = a_0$ et $z_1 r^1 + 1 \cdot z_2 r^1 = a_1$, par construction de z_1, z_2.

Étape d'induction (généreuse). Soit $n \geq 1$ et supposons que $P(n)$ et $P(n-1)$ sont vraies, c.-à-d., $a_n = z_1 r_1^n + n z_2 r_2^n$ et $a_{n-1} = z_1 r_1^{n-1} + (n-1) z_2 r_2^{n-1}$. Alors

$$\begin{aligned}
z_1 r^{n+1} + (n+1) z_2 r^{n+1} &= z_1 r^{n-1} r^2 + (n+1) z_2 r^{n-1} r^2 \\
&= z_1 r^{n-1}(c_1 r + c_2) + (n+1) z_2 r^{n-1}(c_1 r + c_2) \\
&= c_1(z_1 r^n + n z_2 r^n) + c_2(z_1 r^{n-1} + (n-1) z_2 r^{n-1}) + \\
&\quad + z_2 r^{n-1}(r c_1 + 2c_2) \\
&= c_1 a_n + c_2 a_{n-1} \text{ (hyp d'ind., } r c_1 + 2c_2 = 0\text{)} \\
&= a_{n+1} \text{ (récurrence des } a_i\text{)}
\end{aligned}$$

et donc $P(n+1)$ est aussi vraie.

On conclut la preuve par induction. □

13.5. **Preuve par calcul.** La preuve par induction est courte et convaincante, mais n'explique pas d'où vient la formule. Nous allons donner deux autres preuves, une utilisant l'algèbre linéaire et l'autre utilisant le calcul, qui expliquent peut-être un peu plus la source de ces formules.

Nous allons utiliser les résultats d'un cours de calcul dans la suite, sans explications.

Il existe une jolie fonction génératrice pour notre suite $a_0, a_1, a_2, \ldots$ avec la récurrence linéaire $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ ($c_2 \neq 0$). C'est une fonction $f(x)$ définie sur un petit voisinage ouverte contenant 0 avec expansion de Maclaurin (ou série de Taylor en $X = 0$) :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Pour x suffisamment proche de 0 cette suite converge, avec somme limite $f(x)$. Nous montrons d'abord que cette fonction est

$$f(x) = \frac{a_0 + (a_1 - c_1 a_0)x}{1 - c_1 x - c_2 x^2}$$

avec les a_i et c_i comme avant.

Puis nous allons déterminer le coefficient de x^n, qui est a_n, par un développement et obtenir la formule.

Soit $\sum_{i \geq 0} b_i x^i$ la série de Maclaurin de f. On a

$$(1 - c_1 x - c_2 x^2) f(x) = a_0 + (a_1 - c_1 a_0)x.$$

Alors par le cours de calcul,

$$(1 - c_1 x - c_2 x^2) \sum_{i \geq 0} b_i x^i = a_0 + (a_1 - c_1 a_0)x.$$

Calculons

$$\begin{aligned}
(1 - c_1 x - c_2 x^2) \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i &= \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} (-c_1 b_i) x^{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} (-c_2 b_i) x^{i+2} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i + \sum_{i=1}^{\infty} (-c_1 b_{i-1}) x^i + \sum_{i=2}^{\infty} (-c_2 b_{i-2}) x^i \\
&= b_0 + (b_1 - c_1 b_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (b_n - c_1 b_{n-1} - c_2 b_{n-2}) x^n
\end{aligned}$$

En comparant les coefficients avec $a_0 + (a_1 - c_1 a_0)x$, on obtient : $b_0 = a_0$, $b_1 - c_1 b_0 = a_1 - c_1 a_0$ et $(b_n - c_1 b_{n-1} - c_2 b_{n-2}) = 0$ si $n \geq 2$.

Ou $b_0 = a_0$, $b_1 = a_1$ et pour $n \geq 2$ nous avons la récurrence $b_n = c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-2}$. Donc $a_n = b_n$ pour chaque $n \geq 0$ (par une preuve par induction, si vous voulez).

Démonstration du cas 1 par calcul. [40] Nous avons $X^2 - c_1 X - c_2 = (X - r_1)(X - r_2)$, donc nous avons aussi $r_1 + r_2 = c_1$ et$1 - c_1 x - c_2 x^2 = (1 - r_1 x)(1 - r_2 x)$. L'expansion de Maclaurin de $\frac{1}{1-ax}$ est

$$\sum_{n \geq 0} a^n x^n = 1 + ax + a^2 x^2 + a^3 x^3 + \ldots + a^n x^n + \ldots$$

40. Cette preuve ne fait pas partie de la matière examen.

Donc l'expansion de Maclaurin de $f = \frac{1}{(1-r_1x)(1-r_2x)}$ est

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} r_1^i x^i \sum_{j=0}^{\infty} r_2^j x^j &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} r_1^i r_2^j x^{i+j} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} r_1^i r_2^{n-i}\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_2^{n+1}-r_1^{n+1}}{r_2-r_1} x^n
\end{aligned}$$

en utilisant la formule

$$\frac{X^{n+1}-Y^{n+1}}{X-Y} = X^n + X^{n-1}Y + X^{n-2}Y^2 + \ldots + X^iY^{n-i} + \ldots + Y^n.$$

Alors l'expansion de Maclaurin de $\frac{a_0+(a_1-c_1a_0)x}{(1-r_1x)(1-r_2x)}$ est (en utilisant à la fin que $r_1+r_2=c_1$) :

$$\begin{aligned}
(a_0+(a_1-c_1a_0)x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_2^{n+1}-r_1^{n+1}}{r_2-r_1}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_0\frac{r_2^{n+1}-r_1^{n+1}}{r_2-r_1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(a_1-c_1a_0)\frac{r_2^{n+1}-r_1^{n+1}}{r_2-r_1}x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_0\frac{r_2^{n+1}-r_1^{n+1}}{r_2-r_1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(a_1-c_1a_0)\frac{r_2^{n}-r_1^{n}}{r_2-r_1}x^{n} \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-r_1^n(a_0r_1+a_1-c_1a_0)+r_2^n(a_0r_2+a_1-c_1a_0)}{r_2-r_1}x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-r_1^n(-a_0r_2+a_1)+r_2^n(-a_0r_1+a_1)}{r_2-r_1}x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(r_1^nz_1+r_2^nz_2)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(r_1^nz_1+r_2^nz_2)x^n
\end{aligned}$$

Mais nous savions déjà que la coefficient de x^n est a_n. Donc :

$$a_n = (r_1^nz_1 + r_2^nz_2).$$

$\square$

Démonstration du cas 2 par calcul. [41] Nous avons $X^2 - c_1X - c_2 = (X-r)^2$, donc nous avons aussi $2r = c_1$ et$1 - c_1x - c_2x^2 = (1-rx)^2$. L'expansion de Maclaurin de $\frac{1}{(1-x)^2}$ est $\sum_{i\geq 0}(i+1)x^i = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$, alors l'expansion de Maclaurin de $f = \frac{a_0+(a_1-c_1a_0)x}{(1-rx)^2}$

41. Cette preuve ne fait pas partie de la matière examen.

est

$$\begin{aligned}
(a_0+(a_1-c_1a_0)x)\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)r^ix^i &= \sum_{i=0}^{\infty}a_0(i+1)r^ix^i+\sum_{i=0}^{\infty}(a_1-c_1a_0)(i+1)r^ix^{i+1}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}a_0(i+1)r^ix^i+\sum_{i=1}^{\infty}(a_1-c_1a_0)(i)r^{i-1}x^i\\
&= a_0+\sum_{i=1}^{\infty}\left(a_0(i+1)r^i+(a_1-c_1a_0)(i)r^{i-1}\right)x^i\\
&= a_0+\sum_{i=1}^{\infty}\left(a_0r^i+\frac{a_0r+a_1-c_1a_0}{r}ir^i\right)x^i\\
&= a_0+\sum_{i=1}^{\infty}\left(a_0r^i+\frac{-a_0r+a_1}{r}ir^i\right)x^i\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\left(a_0r^i+\frac{-a_0r+a_1}{r}ir^i\right)x^i\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\left(z_1r^i+iz_2r^i\right)x^i
\end{aligned}$$

(à la fin nous avons utilisé la définition des z_i et avant que $r-c_1=-r$). Mais nous savions déjà que la coefficient de x^n est a_n. Donc :

$$a_n=z_1r^n+nz_2r^n.$$

□

13.6. **Preuve par algèbre linéaire.** [42]

Dans la situation de notre suite $a_0,a_1,a_2,\dots$ avec la récurrence, etc., considérons la matrice

$$\begin{pmatrix}0&1\\c_2&c_1\end{pmatrix}$$

et pour $n\geq 1$ la multiplication matricielle

$$\begin{pmatrix}0&1\\c_2&c_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n\\c_1a_n+c_2a_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix},$$

en utilisant la récurrence dans notre suite.

Donc (par une preuve par induction sur n) on montre

$$\begin{pmatrix}0&1\\c_2&c_1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix}.$$

42. Cette méthode ne fait pas partie de la matière de l'examen.

Donc pour obtenir le cas général a_n on pourrait calculer d'abord la puissance de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}^n,$$

puis calculer le vecteur

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

et prendre le premier coefficient ! C'est ce que nous allons faire.

Démonstration du cas 1 par algèbre linéaire. [43] Calculer directement $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}^n$ nécessiterait trop de travail. C'est mieux de diagonaliser avant, si possible, ou sinon au moins de diagonaliser.

(Remarque : Le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}$ est $X^2 - c_1X + c_2$, donc les deux racines, sont les deux valeurs propres de la matrice. Donc par algèbre linéaire on peut diagonaliser dans notre cas 1. Nous allons le faire....)

Rappelons que $r_i^2 = c_1r_i + c_2$, pour $i = 1, 2$, pour les deux racines.

Nous avons par un calcul direct :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ c_1r_1 + c_2 & c_1r_2 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^2 & r_2^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

Avec

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} r_2 & -1 \\ -r_1 & 1 \end{pmatrix}$$

nous avons diagonalisé :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Et donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

43. Cette preuve ne fait pas partie de la matière examen.

Calculons

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & -1 \\ -r_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 a_0 - a_1 \\ -r_1 a_0 + a_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (r_2 a_0 - a_1) r_1^n \\ (-r_1 a_0 + a_1) r_2^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} (r_2 a_0 - a_1) r_1^n + (-r_1 a_0 + a_1) r_2^n \\ (r_2 a_0 - a_1) r_1^{n+1} + (-r_1 a_0 + a_1) r_2^{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z_1 r_1^n + z_2 r_2^n \\ z_1 r_1^{n+1} + z_2 r_2^{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

avec les z_1, z_2 comme avant.

On conclut que $a_n = z_1 r_1^n + z_2 r_2^n$. □

Démonstration du cas 2 par algèbre linéaire. [44] Dans ce cas on ne peut pas diagonaliser, mais au moins triangulariser. Rappel $r^2 = c_1 r + c_2$ et $c_1 = 2r$). Nous avons

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 1 \\ c_1 r + c_2 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 1 \\ r^2 & 2r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

Avec

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r & 1 \end{pmatrix}$$

nous avons triangularisé :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

On montre (par induction sur n) que

$$\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} r^n & n r^{n-1} \\ 0 & r^n \end{pmatrix}$$

44. Cette preuve ne fait pas partie de la matière examen.

donc
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^n & nr^{n-1} \\ 0 & r^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Calculons encore

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^n & nr^{n-1} \\ 0 & r^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^n & nr^{n-1} \\ 0 & r^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^n & nr^{n-1} \\ 0 & r^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ -ra_0 + a_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 r^n + nr^{n-1}(-ra_0 + a_1) \\ r^n(-ra_0 + a_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_0 r^n + nr^{n-1}(-ra_0 + a_1) \\ a_0 r^{n+1} + (n+1)r^n(-ra_0 + a_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z_1 r^n + nz_2 r^n \\ z_1 r^{n+1} + (n+1) z_2 r^{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

avec les z_1, z_2 comme avant.

On conclut que $a_n = z_1 r^n + nz_2 r^n$. □

Remarque. [45] On peut reconnaître une récurrence linéaire par la forme de sa fonction génératrice. Soit f une jolie fonction définie sur un petit intervalle autour de zéro, qui est fonction génératrice de la suite $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

C'est vrai que

• À partir d'un $N \geq r$ il y a une récurrence linéaire de degré r : $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_r a_{n-r}$ pour chaque $n \geq N$

si et seulement si

• Il existe un polynôme $p(x)$ de degré $< N - 1$ tel que

$$f(x) = \frac{p(x)}{1 - c_1 x - c_2 x^2 - \ldots - c_r x^r}$$

pour chaque x suffisement proche de 0.

45. Cette remarque ne fait pas partie de la matière de l'examen.

Pouvez vous montrer ça ? Les méthodes pour le faire sont déjà rencontrées (un défi pour les étudiants confiants).

13.7. **Une autre sorte de récurrence.** Soit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ une suite avec la récurrence non-linéaire $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ pour $n \geq 1$. Supposons $a_0 = 1$. Trouvons une formule générale.

Soit S une fonction génératrice de la suite. Alors la série de la fonction $S - x(8S + \frac{1}{1-10x})$ sera

$$a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n - (8a_{n-1} + 10^{n-1}))x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 0x^n$$

Donc

$$S - x(8S + \frac{1}{1-10x}) = 1$$

ou

$$S = \frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)}$$

Cette fonction génératrice a l'expansion

$$\begin{aligned}
&(1-9x)\sum_{n\geq 0}\frac{10^{n+1}-8^{n+1}}{10-8}x^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{10^{n+1}-8^{n+1}}{2}x^n - \sum_{n\geq 0} 9\frac{10^{n+1}-8^{n+1}}{2}x^{n+1} \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{10^{n+1}-8^{n+1}}{2}x^n - \sum_{n\geq 1} 9\frac{10^{n}-8^{n}}{2}x^{n} \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1}\left[\frac{10\cdot 10^n - 8\cdot 8^n}{2} - \frac{9\cdot 10^n - 9\cdot 8^n}{2}\right]x^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\left[\frac{10^n+8^n}{2}\right]x^n.
\end{aligned}$$

Conclusion : Le term général est

$$a_n = \left[\frac{10^n+8^n}{2}\right]$$

Remarque.[46] La forme de la fonction génératrice nous dit qu'il existe aussi une récurrence linéaire de degré 2 à partir de $N = 2$:

$$a_n = 18a_{n-1} - 80a_{n-2}.$$

Vérification :

$$a_n - 18a_{n-1} = (8a_{n-1} + 10^{n-1}) - 18a_{n-1} = -10a_{n-1} + 10^{n-1} = -10(8a_{n-2} + 10^{n-2}) + 10^{n-1} = -80a_{n-2}.$$

En effet !

46. Cette remarque ne fait pas partie de la matière de l'examen.

Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, C.P. 6128, succursale Centre-ville, Montréal (Québec), Canada H3C 3J7

E-mail address: broera@DMS.UMontreal.CA