Rappel Modus Ponens : $(p \wedge (p \to q)) \Rightarrow q$, c.-à-d.
$(p \wedge (p \to q)) \to q$ est une proposition logique toujours vraie, n'importe les propositions p et q.

Preuve par tableau :

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Preuve directe :

Supposons l'hypothèse soit vraie ; c.-à-d., p et $p \to q$ sont supposés vraies.
$p \to q$ vraie veut dire par définition : soit (i) p est fausse, soit (ii) p et q sont vraies. Un des deux cas.
Mais on a supposé p est vraie, donc c'est cas (ii). Ce qui implique que q est vraie aussi.
Donc si l'hypothèse est vraie, la conclusion est vraie aussi. Cette implication est vraie. $\square$

$(p \wedge (p \to q)) \to q$ est une proposition logique toujours vraie, n'importe les propositions p et q.

En particulier, si p est remplacé par une autre proposition logique, et q aussi par une autre proposition logique alors l'implication reste vraie.

Exemple : remplace "p" partout dans la formule par $q \vee (r \to s)$ et "q" partout par $p \to s$. On obtient que la proposition logique suivante est aussi automatiquement VRAIE :

$$([q \vee (r \to s)] \wedge ([q \vee (r \to s)] \to [p \to s])) \to [p \to s]$$

(attention aux ()'s et [ ]'s).

Autre règles d'inférence souv~~a~~ent utilisées :

$$(\neg q \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow \neg p \text{ (modus tollens)}$$

et

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r) \text{ (syllogisme par hypothèse)}$$

Preuve modus tollens en utilisant modus ponens

$(p \wedge (p \to q)) \Rightarrow q$.

Faisons les substitutions p par $\neg q$ et q par $\neg p$ (on a le droit !) :

$(\neg q \wedge (\neg q \to \neg p)) \Rightarrow \neg p$.

Puis utilisons l'équivalence logique

$(\neg q \to \neg p) \Leftrightarrow (p \to q)$

nous obtenons modus tollens :

$(\neg q \wedge (p \to q)) \Rightarrow \neg p$.

(Autre preuve par tableau !)

Preuve algébrique de l'équivalence logique

$$[(p \vee q) \to r] \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r).$$

$$\begin{aligned}
[(p \vee q) \to r] &\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r \text{ (Car } p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r \text{ (Par De Morgan)} \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \text{ (Par distr.)} \\
&\Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r) \text{ (Car } p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q)
\end{aligned}$$

"S'il fait beau je vais nager cet après-midi. Je ne vais pas nager cet après-midi. Donc il ne fait pas beau."
Cette proposition composée (ou cet argument) est vraie par modus tollens.
Mais je ne sais pas si "S'il fait beau je vais nager cet après-midi" est vraie ou fausse ! !

"S'il fait beau je vais nager cet après-midi. Si je vais nager cet après-midi, je dormirai bien ce soir. Donc s'il fait beau je dormirai bien se soir."

Cette proposition composée (ou cet argument) est vraie, par

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \Rightarrow (p \to r) \text{ (syllogisme par hypothèse)}$$

$A \subset B \subset C \not\subset A$ alors $A \subset C \not\subset$

On peut combiner des règles d'inférence et les équivalences logiques :

Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ alors aussi $P \Rightarrow R$.

Et

$P \Leftrightarrow Q$ si et seulement si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Exemple :

$$[(p \vee q) \to r] \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$$

implique la règle d'inférence

$$[(p \to r) \wedge (q \to r)] \Rightarrow [(p \vee q) \to r]$$

Qu'est-ce que vous pensez :

"C'est certain que si quelqu'un fait beaucoup d' haltères il sera fort. Vous êtes fort. Donc vous devez avoir faites beaucoup des haltères. Non ?"

Non, ce n'est pas un argument acceptable.

Une formule qui n'est pas une tautologie est appelée : contrevérité.

Par exemple :

$$P(p, q) := [(p \to q) \land q] \to p$$

n'est PAS une tautologie, donc une contrevérité, car si p est fausse et q vraie, alors P est fausse.
Si on sait seulement que q est vraie, on ne sait pas encore si P est vraie ou fausse !

$\not\supset$

Considérons :

"... ainsi on a montré que p implique q. Parce que on sait aussi que q est vraie, on conclut que p est aussi vraie. "

cet argument n'est pas logiquement correct, évidemment.

Considérons l'argument :

P :=" Si 32085 est divisible par 13, alors 32085^2 est divisible par $13^2 = 169$. Le nombre 32085 est divisible par 13. Par conséquent, 32085^2 est divisible par 169".

Analyse : posons p ="32085 est divisible par 13", q :="32085^2 est divisible par $13^2 = 169$". Alors $P = [(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$.
Donc P est vraie par modus ponens !

Cet argument P est valide, alors on peut conclure que 32085^2 est divisible par 169.

Qu'est-ce que vous pensez ?

Calculatrice : $\frac{32085^2}{169} = 6091403.69822....$
Hè ? ! On doit avoir fait une petite erreur quelque part !

En effet.
"Cet argument est valide, alors 32085^2 est divisible par 169"
est basée sur une contre-vérité

$$([(p \to q) \wedge p] \to q) \to q$$

(si c'est une tautologie et son hypothèse P est vraie (ce qui est le cas), alors par modus ponens, en effet q serait vraie aussi. Mais.....)

Partie d'un argument :

"... bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla
bla bla bla supposons p vraie bla bla bla
Puis on donne encore plus d'arguments,
bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla
ce qui montre finalement que p est vraie.

Donc nous avons montré que p est vraie !"

On suppose p est vraie pour montrer que p est vraie. Hmmm.
Raisonnement circulaire.

Preuve par l'absurde ou Reductio ad absurdum

Une telle preuve peut être basée sur la règle d'inférence :

$$[(\neg p \to (q \wedge \neg q)] \Rightarrow p$$

ou sur la règle

$$[(\neg p \to q) \wedge \neg q] \Rightarrow p$$

Supposons on veut montrer qu'une proposition p est vraie.
En supposant p est fausse, on montre une proposition auxiliaire disons q. Alors que $\neg p \to q$ est vraie.
Puis on montre (ou on sait déjà) que son opposé $\neg q$ est vraie.
Donc l'hypothèse de la règle d'inférence est vraie :

$$[(\neg p \to q) \wedge \neg q] \Rightarrow p.$$

C'est une règle d'inférence, donc aussi la conclusion p est vraie.

Soient A et B deux ensembles et $F : A \to B$ et $G : B \to A$ deux fonctions telles que $G \circ F = 1_A$.
Considérons la proposition logique

$p :=$"F est injective".

Preuve par l'absurde : Supposons p est faux, c.-à-d., F n'est pas injective. Par définition d'injectivité, ils existent deux éléments a_1, a_2 de A telles que $F(a_1) = F(a_2)$, mais $a_1 \neq a_2$. Parce que $G \circ F = 1_A$ on a

$$a_1 = 1_A(a_1) = G(F(a_1)) = G(F(a_2)) = 1_A(a_2) = a_2.$$

Donc sous l'hypothèse que p est fausse, on a montré la proposition $q :=$"ils existent a_1, a_2 dans A tels que $a_1 = a_2$ et $a_1 \neq a_2$" est vraie. Ce qui est absurde, car son opposé, $\neg q$, est vraie.
On conclut p est vraie. $\square$

Soit P une proposition en mathématiques.

Théorème

P

Preuve par l'absurde typique.

Supposons P est fausse. Puis (avec cette hypothèse et avec de l'aide de théorèmes déjà montrés) on montre une proposition auxiliaire, disons q. Puis on montre directement (sans utiliser l'hypothèse que P est fausse) que q est fausse. Ce qui serait absurde.

On conclut : P est vraie. □

Un cas spécial. Soient P et Q deux propositions en mathématiques.

Théorème

$P \to Q$

Preuve par l'absurde typique.

Supposons $P \to Q$ est fausse, c.-à-d., supposons P vraie et Q fausse. Puis (avec ces deux hypothèses et avec de l'aide de théorèmes déjà montrés) on montre une proposition auxiliaire, disons r. Puis on montre directement (sans utiliser l'hypothèse que $P \to Q$ est fausse) que r est fausse. Ce qui serait absurde.
On conclut : $P \to Q$ est vraie. □

Supposons P est fausse .....

....

Si on veut montrer $P \to Q$ il y a trois types de preuves typiques, trois stratégies.

Preuve directe. Avec l'hypothèse P on montre (avec de l'aide de théorèmes déjà établis) Q.

Preuve indirecte. Avec l'hypothèse $\neg Q$ on montre (avec de l'aide de théorèmes déjà établis) $\neg P$.

Preuve par l'absurde. Avec les hypothèse P et $\neg Q$ on montre (avec de l'aide de théorèmes déjà établis) une absurdité auxiliaire.

Il y a des liens entre la logique et la théorie des ensembles.

Soit $A \subseteq U$ et $B \subseteq U$ deux sous-ensembles.
Fixons un $u \in U$ et considérons :
$p :=$"$u \in A$"
$q :=$"$u \in B$".
Alors
$p \wedge q =$ "$u \in A$"$\wedge$ "$u \in B$" $=$ "$u \in A$ et $u \in B$"$=$"$u \in A \cap B$" (par définition de $\cap$.
Et
$p \vee q =$ "$u \in A$" $\vee$ "$u \in B$" $=$ "$u \in A$ ou $u \in B$"$=$"$u \in A \cup B$" (par définition de $\cup$.