Aujourd'hui nous allons discuter :

- Problèmes autour des arrangements
- Le nombre d'arrangements
- Changement de variables.
- Problèmes avec Inclusion-Exclusion
- Compositions
- et Partitions

Arrangements

Nous allons formuler trois autres problèmes voisins E, F, G.

E : Combien de mots différents peut-on former à partir des lettres du mot "aardvark" en utilisant toutes les lettres (=un arrangement) ?

(Mais le mot ne doit pas nécessairement être un mot de dictionnaire.)

On peut voir "aardvark" comme un certain suite de lettres :

$$(a, a, r, d, v, a, r, k).$$

En effet, l'ordre des lettres est relevant ici.

Il y a un multi-ensemble associé

$$\{a^3, d^1, k^1, r^2, v^1\}.$$

Donc on veut compter le nombre de suites, qui ont trois a, deux r, et un d, v, k, c-à-d. avec le même multi-ensemble associé.

Avant de formuler un problème similaire, nous avons besoin d'une fonction.

Soit E un ensemble. Nous allons définir une fonction avec domaine E^N et codomaine l'ensemble des multi-ensembles sur E :

Chaque suite $(a_1, \ldots, a_N) \in E^N$ donne un multi-ensemble de taille N sur E, où la multiplicité de $a \in E$ est le nombre de fois que a apparaît dans la suite.

Si $E = \{a, d, k, r, v\}$, alors $(a, a, r, d, v, a, r, k) \in E^8$ est envoyé au multi-ensemble

$$\begin{pmatrix} a & d & k & r & v \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \{a^3, d^1, k^1, r^2, v^1\}$$

F : Combien de suites donnent ce même multi-ensemble $\{a^3, d^1, k^1, r^2, v^1\}$?

Soit donné un commode avec cinq tiroirs étiquettés par les lettres a, d, k, r respectivement v.

G : Combien de façons de ranger 8 objets (discernables, disont $x_1, \ldots, x_8$) dans les tiroirs, tel que tiroir "a" reçoit 3 objets, tiroir "d" en reçoit 1, tiroir "k" en reçoit un, tiroir "r" reçoit 2 et tiroir v en reçoit un ?

(Remarque ; Si les objets sont indiscernable ? Réponse $= 1$).

Mais l'ordre à l'intérieur de chaque tiroir est considéré irrélevant ici.

Les problèmes E,F et G ont tous la même réponse.

Même si nous ne connaissons pas encore la réponse !

- L'arrangement "varkaard" correspond
- à la suite (v, a, r, k, a, a, r, d), qui correspond
- à ranger les objets x_2, x_5, x_6 dans tiroir a, x_8 dans tiroir d, x_4 dans tiroir k et x_3, x_7 dans tiroir r, et x_1 dans tiroir v i.e. :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ v & a & r & k & a & a & r & d \end{pmatrix}.$$

Ce sont des bijections !

Réponse de E : Un mot a des lettres à huit positions.

• Choisir les trois positions (parmi huit) pour placer les trois a,
et puis
• choisir la position (parmi cinq) pour placer le d
et puis
• choisir la position (parmi quatre) pour placer le k
et puis
• choisir les deux positions (parmi trois) pour placer les deux r
et puis
• choisir la position (parmi un) pour placer le v.

Par le principe de "et"
$C(8,3) \cdot C(5,1) \cdot C(4,1) \cdot C(3,2) \cdot C(1,1) = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \frac{5!}{1! \cdot 4!} \frac{4!}{1! \cdot 3!} \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{8!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1!}$.

La réponse pour tous les problèmes E,F et G est :

$$\frac{8!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1!}.$$

Généralisations :

Théorème

Le nombre de façons de ranger N objets (discernables) dans n tiroirs (discernables), de manière telle que m_i objets sont rangés dans le tiroir i (où $1 \leq i \leq n$, ordre dans les tiroirs est sans importance) est égal à

$$\frac{N!}{m_1!m_2!m_3!\cdots m_n!}$$

Démonstration.

Par le principe de "et" : Choisir les m_1 objets pour tiroir 1 parmi les N, et puis choisir les m_2 objets pour tiroir 2 parmi les $N - m_1$ objets qui restent encore, et puis etcetera :

$$C(N, m_1) \cdot C(N - m_1, m_2) \cdot C(N - m_1 - m_2, m_3) \cdots =$$
$$= \frac{N!}{m_1!(N - m_1)!} \frac{(N - m_1)!}{m_2!(N - m_1 - m_2)!} \frac{(N - m_1 - m_2)!}{m_3!(N - m_1 - m_2 - m_3)!} \cdots =$$
$$= \frac{N!}{m_1! m_2! m_3! \cdots m_n!}$$

□

Théorème

Le nombre de différentes permutations (ou arrangements) de N objets, où il y a m_1 objets indiscernable de type 1, m_1 objets indiscernable de type 2, ... et m_n objets indiscernable de type n est

$$\frac{N!}{m_1!m_2!m_3!\cdots m_n!}$$

Démonstration.

Même nombre que dans le th. précédent, car il y a une bijection ...... Ou utilise le principe du produit : choisir les positions pour les objets de type 1, puis les positions des objets de type 2, etc. $\square$

Par exemple :
Combien de façons de distribuer à quatre joueurs une main de treize cartes chacun ?

Réponse : Les tiroirs sont étiquettés par les noms des joueurs, les objets sont les 52 cartes discernables, chaque tiroir obtient 13 cartes (mais l'ordre n'importe pas). Réponse :

$$\frac{52!}{13!13!13!13!}.$$

Substitution ou changement des variables

D : Combien de façons de résoudre l'équation

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 25,$$

avec $X_i \in \mathbb{Z}$, tels que

$$X_1 \geq 3;\ \ X_2 \geq 4;\ \ X_3 \geq -5;\ \ X_4 \geq 0\ ?$$

D' : Combien de façons de résoudre l'équation

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 23,$$

avec $X_i \in \mathbb{N}$?

Les liens ? Changer les variables !

Soit $(X_1, X_2, X_3, X_4) \in \mathbb{Z}^4$ une solution pour D.
Posons

$$Y_1 = X_1 - 3; \;\; Y_2 = X_2 - 4; \;\; Y_3 = X_3 + 5; \;\; Y_4 = X_4$$

alors aussi (et ainsi on peut retrouver) :

$$X_1 = Y_1 + 3; \;\; X_2 = Y_2 + 4; \;\; X_3 = Y_3 - 5; \;\; X_4 = Y_4.$$

$$X_1 = Y_1 + 3;\ X_2 = Y_2 + 4;\ X_3 = Y_3 - 5;\ X_4 = Y_4.$$

Les conditions correspondent :

$$\begin{aligned}
X_1 \geq 3 &\iff Y_1 \geq 0\\
X_2 \geq 4 &\iff Y_2 \geq 0\\
X_3 \geq -5 &\iff Y_3 \geq 0\\
X_4 \geq 0 &\iff Y_4 \geq 0.
\end{aligned}$$

$$X_1 = Y_1 + 3;\ X_2 = Y_2 + 4;\ X_3 = Y_3 - 5;\ X_4 = Y_4.$$

Et les sommes correspondent :

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 25,$$

si et seulement si

$$(Y_1 + 3) + (Y_2 + 4) + (Y_3 - 5) + (Y_4) = 25,$$

ou

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 25 - 3 - 4 + 5 = 23.$$

Conclusion : $(X_1, X_2, X_3, X_4) \in \mathbb{Z}^4$ est une solution de

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 25,$$

tels que

$$X_1 \geq 3;\ X_2 \geq 4;\ X_3 \geq -5;\ X_4 \geq 0$$

si et seulement si

$(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) \in \mathbb{N}^4$ est une solution de

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 23,$$

avec $Y_i \in \mathbb{N}$.

Une bijection !

Donc les réponses des problèmes D et D' sont égales. Par notre formule :

$$C(23+4-1,23) = C(26,23) = C(26,3) = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2600$$

$\square$

Retour aux fruits

Dans un bol : 4 bananes, 6 oranges, 7 poires.
Combien de façons de choisir 10 fruits, mais au moins 1 banane, 3 oranges et 3 poires ?

Posons $E = \{$ banane, orange, poire $\}$.
Chaque choix de 10 fruits correspond à choisir 10 fois un élément de E, avec remise, et où l'ordre de choix n'est pas relevant : c.-à-d. chaque choix donne une 10-combinaison avec remise de E.

Attention :

Mais pas chaque 10-combinaison avec remise de E correspond à un choix de 10 fruits dans le bol. Par exemple, la 10-combinaison sans remise "choisir 10 fois une banane" ne correspond pas à un choix de 10 fruits dans le bol (il y a seulement 4 bananes dans le bol !). Donc il ne s'agit pas d'une bijection.

Solution. Stratégie :

(i) Prendre déjà 1 banane, 3 oranges et 3 poires. Il reste 3 bananes, 3 oranges et 4 poires dans le bol.
(ii) Après il faut encore décider quel choix de 3 fruits restant à faire, parmi les 10 fruits qui restent :

Il reste de chaque type au moins 3 fruits. Donc un choix de 3 fruits est dans cette situation la même chose comme une 3-combinaison avec remise de l'ensemble { banane, orange, poire }. On sait compter les 3-combinaisons sans remise d'un ensemble de 3 éléments.
Réponse :

$$C(3+3-1, 3-1) = C(5,2) = 10.$$

(iii) On peut même énumérer les dix choix de fruits, avec la notation des multi-ensembles :

$$\{b^{1+3}, o^3, p^3\}, \{b^1, o^{3+3}, p^3\}, \{b^1, o^3, p^{3+3}\},$$

$$\{b^{1+2}, o^{3+1}, p^3\}, \{b^{1+2}, o^3, p^{3+1}\},$$

$$\{b^{1+1}, o^{3+2}, p^3\}, \{b^1, o^{3+2}, p^{3+1}\},$$

$$\{b^{1+1}, o^3, p^{3+2}\}, \{b^1, o^{3+1}, p^{3+2}\},$$

$$\{b^{1+1}, o^{3+1}, p^{3+1}\}.$$

Problèmes voisins :

• Combien de multi-ensembles M de taille 10, tels que

$$\{b^1, o^3, p^3\} \subseteq M \subseteq \{b^4, o^6, p^7\} \text{ ?}$$

• Combien de solutions entières de l'équation $X_1 + X_2 + X_3 = 10$ tels que $1 \leq X_1 \leq 4, 3 \leq X_2 \leq 6, 3 \leq X_3 \leq 7$?

Même réponse : 10.

• Combien de solutions entières de l'équation $X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_m = n$ tels que $r_1 \leq X_1, r_2 \leq X_2, \ldots, r_m \leq X_m$?

• Combien de solutions entières de l'équation $Y_1 + Y_2 + X_3 + \ldots + Y_m = (n - (r_1 + r_2 + \ldots + r_m))$ tels que chaque $0 \leq Y_i$?

Les deux problèmes ont la même réponse :

$$C(n + m - (r_1 + r_2 + \ldots + r_m) - 1, m - 1).$$

(1) Par une substitution $Y_i = X_i - r_i$ pour chaque i, nous avons vu que les deux ensembles de solutions sont en bijection. Donc les deux problèmes ont la même réponse. La deuxième problème est "standard" :

$$C(n + m - (r_1 + r_2 + \ldots + r_m) - 1, m - 1).$$

(2) Une autre formulation pour résoudre le premier problème :

(i) D'abord "on donne à X_i déjà r_i unités" (pour chaque i).

(ii) Après il y a encore $(n - (r_1 + r_2 + \ldots + r_m))$ unités (indistinguables) à distribuer dans m "tiroirs" (distinguables). On peut faire ça dans $C(n + m - (r_1 + r_2 + \ldots + r_m) - 1, m - 1)$ de manières (par un thm. montré en classe la dernière fois).

Avec inclusion-exclusion

Problème plus compliqué :

- Combien de solutions entières de l'équation

$$X_1 + X_2 + X_3 = 19,$$

tels que $3 \leq X_1 \leq 6$, $7 \leq X_2 \leq 11$ et $-2 \leq X_3 \leq 4$?

• Ce problème est similaire au problème de ranger 19 objets (considérés indistingables) dans trois tiroirs (distinguables) de tailles restraints, et au moins un certain nombre d'objets par tiroir. (Sauf ..)

• Ce problème est très similaire au problème traité de choisir un certain nombre des fruits de plusieurs types dans un bol de quantités restraints. C'est qu'avant nous étions un peu chanceux avec la solution. Dans ce cas on verra les complications générales.

Première réduction : par un substitution $X_1 = Y_1 - 3$, $X_2 = Y_2 - 7$, $X_3 = Y_3 + 2$ et l'observation que $19 - (3 + 7 - 2) = 11$ on trouve une équation avec le même nombre de solutions.

- Combien de solutions entières de l'équation

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = 11,$$

tels que $0 \leq Y_1 \leq 3$, $0 \leq Y_2 \leq 4$ et $0 \leq Y_3 \leq 6$?

Il suffit de compter ces solutions.

Soit U l'ensemble de solutions entières de l'équation

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = 11,$$

où chaque $Y_i \in \mathbb{N}$.

$U_1 \subseteq U$ le sous-ensemble de solutions où $Y_1 \geq 4$;
$U_2 \subseteq U$ le sous-ensemble de solutions où $Y_2 \geq 5$;
$U_3 \subseteq U$ le sous-ensemble de solutions où $Y_1 \geq 7$.
Nous cherchons

$$|U| - |U_1 \cup U_2 \cup U_3|$$

Inclusion-exclusion !

Alors $U_1 \cap U_2$ est le sous-ensemble de solutions où $Y_1 \geq 4$ et $Y_2 \geq 5$;

$U_1 \cap U_3$ est le sous-ensemble de solutions où $Y_1 \geq 4$ et $Y_3 \geq 7$;

$U_2 \cap U_3$ est le sous-ensemble de solutions où $Y_2 \geq 5$ et $Y_3 \geq 7$;

$U_1 \cap U_2 \cap U_3$ est le sous-ensemble de solutions où $Y_1 \geq 4$, $Y_2 \geq 5$ et $Y_3 \geq 7$.

Pour chaque ensemble on sait déjà comment compter la taille !

$$
\begin{aligned}
|U| &= C(11+3-1,3-1) = 78;\\
|U_1| &= C(11+3-\color{red}{4}-1,3-1) = C(9,2) = 36;\\
|U_2| &= C(11+3-\color{red}{5}-1,3-1) = C(8,2) = 28;\\
|U_3| &= C(11+3-\color{red}{7}-1,3-1) = C(6,2) = 15;\\
|U_1 \cap U_2| &= C(11+3-\color{red}{(4+5)}-1,3-1) = C(4,2) = 6;\\
|U_1 \cap U_3| &= C(11+3-\color{red}{(4+7)}-1,3-1) = C(2,2) = 1;\\
|U_2 \cap U_3| &= 0;\\
|U_1 \cap U_2 \cap U_3| &= 0.
\end{aligned}
$$

Nous cherchons les solutions qui ne sont ni dans Y_1, ni dans Y_2, ni dans Y_3. Nous voulons compter, par le principe d'inclusion-exclusion :

$$|U-(U_1\cup U_2\cup U_3)| = |U| - |U_1\cup U_2\cup U_3| =$$

$$= |U|-(|U_1|+|U_2|+|U_3|)+(|U_1\cap U_2|+|U_1\cap U_3|+|U_2\cap U_3|)-(|U_1\cap U_2\cap U_3|)$$

$$= 78-(36+28+15)+(6+1+0)-0 = 6$$

La réponse est 6.

Notre méthode est général, et s'applique toujours dans les situations semblables.

En fait, dans cet exemple, c'est plus facile de simplement énumérer les solutions dans le problème original, mais on ne le savait pas au début !

- L'ensemble des solutions entières $(X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{Z}^3$ de l'équation

$$X_1 + X_2 + X_3 = 19,$$

tels que $3 \leq X_1 \leq 6$, $7 \leq X_2 \leq 11$ et $-2 \leq X_3 \leq 4$ est

$$\{(6,11,2),(5,11,3),(6,10,3),(6,9,4),(5,10,4),(4,11,4)\}.$$

Il y en a six, en effet !

Autres problèmes de comptage

• Soit $n > 0$ un nombre naturel. Une composition de n est une manière d'écrire n comme une somme d'entiers positifs, où l'ordre des parties est considéré pertinent.

Les compositions de 4 sont

$$4, 3+1, 1+3, 2+2, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2, 1+1+1+1.$$

Donc $1+3$ et $3+1$ sont distingués.

• Une partition de n est une manière d'écrire n comme une somme d'entiers positifs, où l'ordre des parties est considéré pas pertinent.

Les partitions de 4 sont représentées par

$$4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1.$$

Les partitions de n sont en bijection avec les suites $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ telle que

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n$$

et

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n.$$

Les partitions de 4 sont aussi représentées par

$$(4,0,0,0),(3,1,0,0),(2,1,1,0),(1,1,1,1).$$

Combien de partitions de n ? Il n'y pas de formule simple !

C'est un sujet très riche, mais ne sera plus discuté dans ce cours.

Important, parce que beaucoup de "objets mathématiques intéressants" sont en bijection avec les partitions.

Mais :

- Le nombre de compositions de n est 2^{n-1}.

Une formule très simple ! Est-ce qu'il y a une explication, pourquoi le formule est si simple ? Comment le montrer ?

Une analyse préliminaire :

Chaque composition a un nombre de parties.
La composition de 14 : $2+3+1+6+1+1$ a six parties.

Fixons m et comptons le nombre de compositions de n en m parties : ils sont toutes de la forme

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_m \ (= n)$$

où chaque $r_i \geq 1$. Nous savons compter ça :

$$C(n-m+m-1, m-1) = C(n-1, m-1)$$

On peut avoir $1, 2, \ldots,$ ou n parties. Par le principe de l'addition :

En total :

$$C(n-1, 1-1) + C(n-1, 2-1) + C(n-1, 3-1) + \ldots + C(n-1, n-1) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} C(n-1, i) = 2^{n-1}.$$

$\square$

Une question se pose : 2^{n-1} est aussi le nombre de sous-ensembles d'un ensemble de $n-1$ éléments.

Et $C(n-1, m-1) = C(n-1, n-m)$ est aussi le nombre de sous-ensembles de taille $m-1$ (resp $n-m$) d'un ensemble de $n-1$ éléments.

Une coincidence ?

Peut-on trouver une bijection naturelle ?

Disons $n = 10$: on a 10 unités

$$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$$

Il y a $10-1$ signes $+$ dans des positions différentes, disons $1, 2, \ldots, 9$.

(i) Prendre un sous-ensemble de ces positions, disons $\{2, 3, 6, 7, 8\}$:

$$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$$

(ii) Faire les additions des $+$ mais pas les autres $+$:

$$1+3+1+4+1$$

On obtient une composition de 10 en 5 parties.

(iii) Chaque composition de 10 est uniquement obtenue de cette façon. Par exemple :

$$3+1+6 = (1+1+1)+1+(1+1+1+1+1+1)$$

vient de $\{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Ainsi on obtient une bijection entre les sous-ensembles (de taille $n - m$) d'un ensemble de $n - 1$ éléments et les compositions de n (en m parties).

Ça explique les formules trouvées.