Aujourd'hui nous allons discuter :

- Quelques équivalences logiques utiles
- Preuve par algèbre de Boole
- Terminologie
- Quelques contre-vérités
- Règles d'inférence : Modus Ponens et Modus Tollens
- Combiner les inférences et équivalences
- Reductio ad Absurdum.

Équivalences utiles

Rappel : une équivalence utilisée souvent en mathématiques :

$$(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (Q \to P)).$$

En mots : $P \leftrightarrow Q$ est vraie si et seulement si $P \to Q$ et sa réciproque $Q \to P$ sont vraies.

Deux autres exemples d'équivalence, très importants pour nous :

$$(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$$

(une implication est équivalente à sa contraposé).

Et

$$(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$$

Terminologie

La contraposée de $p \to q$ est par définition la proposition $(\neg q) \to (\neg p)$.

Nous avons montré :
la proposition $p \to q$ et sa contraposée sont logiquement équivalentes :

$$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p).$$

(Il y a une faute d'écriture du manuel sur p. 7 : ne laissez-vous pas distraire).

Terminologie :

La réciproque de $p \rightarrow q$ est par définition la proposition $q \rightarrow p$.

Nous avons montré que :

$p \leftrightarrow q$ est vraie si et seulement $p \rightarrow q$ et sa reciproque sont vraies :

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$$

Contre-vérités

Qu'est-ce que vous pensez de ce qui suit ?

"$q \to p$ est une sorte d'opposé de $p \to q$ (sa réciproque)

et est $p \to q$ une sorte d'opposé de $q \to p$;

et l'opposé de $(q \to p)$ est par définition $\neg(q \to p)$.

Donc $p \to q$ est la même chose que $\neg(q \to p)$."

Ou, dans la langue de la semaine passée, ça semble que

$$(p \to q) \Leftrightarrow \neg(q \to p) \text{ ????}$$

Raisonable ? Logique ?

Si vous avez des doutes, vous devez vérifier ! ! :

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\neg(q \to p)$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg(q \to p))$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F

NON, pas équivalentes : $q \to p$ n'est pas l'opposé de $p \to q$.

On dit que c'est une contre-vérité !

Moral : Il faut aiguiser votre sens critique, en cas de besoin.

Ne plus croire ce qui "semble" vrai.

Il faut absolument éviter "l'utilisation" des contre-vérités !

Une conversation :

E : "...... on a déjà montré que p implique q.... alors q est vraie et ......"

P : "Non, on n'a pas le droit de conclure ça."

E : "Mais, j'ai montré que q est vraie en supposant que p est vraie, n'est-ce pas ? Alors q est vraie, non ?"

P : "Non ! Seulement en supposant p vrai. Mais tu ne sais pas si p est vraie, tu ne l'as pas montré ! Que'est-ce qu'on peut dire de q si p est faux ?! Rien du tout !"

Exemple :

- C'est incontestablement vrai que :

$("0 = 1") \rightarrow$ "Dieu existe".

- Bon. Ça oui !

- Il suit donc que "Dieu existe" ? !

- Non.

- Alors, nécessairement "Dieu n'existe pas" ? !

- Non !

Une formule qui n'est pas une tautologie est une contrevérité.

Les contre-vérités "utilisées" étaient

$$(p \to q) \Rightarrow q$$

(FAUX ! !) et l'autre ?

Partie d'un argument :

"... bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla
bla bla bla supposons p vraie bla bla bla.
Puis on donne encore plus d'arguments,
bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla
ce qui montre finalement que p est vraie.

Donc nous avons montré que p est vraie !"

On suppose p est vraie pour montrer que p est vraie. Hmmm.
Raisonnement circulaire.
On a "utilisé" $(p \rightarrow p) \Rightarrow p$, qui est une contre-vérité (est FAUX donc)..

Qu'est-ce que vous pensez :

"C'est certain que si quelqu'un fait beaucoup des haltères il sera fort. Vous êtes fort. Donc vous devez avoir faites beaucoup des haltères. Non ?"

Non, ce n'est pas un argument acceptable.
On a "utilisé" $((p \to q) \wedge q) \Rightarrow p$, une contre-vérité (alors FAUX).

Qu'est-ce que vous pensez :

"C'est certain que si quelqu'un fait beaucoup des haltères il sera fort. Vous ne faites pas beaucoup des haltères. Donc vous ne serez pas fort !"

"L'argument" est basée sur une autre contre-vérité "utilisée" souvent :

$$P := [(p \to q) \wedge \neg p] \Rightarrow \neg q$$

Donc ce n'est pas acceptable comme argument.

Modus Ponens

Les raisonnements

" .....on sait que p est vraie et que ça implique q, donc q est vraie ...."

ou

"...... on a déjà montré que p implique q, et on a montré que p est vraie.... alors q est vrai et ......"

sont des raisonnements logiquement corrects.

Ces raisonnements sont basés sur la tautologie modus ponens :

$$((p \wedge (p \to q)) \to q) \Leftrightarrow V$$

(c.-à-d, toujours vraie, n'importe p et q).

On écrit :

$$(p \wedge (p \to q)) \Rightarrow q$$

Modus Ponens :

Preuve par tableau :

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Preuve directe de Modus Ponens, sans tableau.

Démonstration.

Supposons l'hypothèse est vraie ; c.-à-d., p et $p \to q$ sont supposés vraies.

Par définition $p \to q$ vraie veut dire : soit (i) p est fausse, soit (ii) p et q sont vraies. Un des deux cas.
Mais on a supposé p est vraie, donc c'est cas (ii), c.-à-d. p et q sont vraies, en particulier q est vraie aussi.

Donc si l'hypothèse est vraie, la conclusion (c.-à-d q) est vraie aussi.
On conclut que Modus Ponens est vraie. □

Considérons la proposition logique
P :="S'il fait beau je vais nager cet après-midi. Il fait beau. Donc je vais nager cet après-midi."
P est Vraie ou Fausse ?

Analyse :
Posons :
p :="il fait beau"
q :=" je vais nager cet après-midi".
Donc :
$p \to q$ = "S'il fait beau je vais nager cet après-midi."
$P = [(p \to q) \wedge p] \to q$.
Donc P est vraie par modus ponens ! !

Est-ce que "il fait beau" ? est-ce que " je vais nager cet après-midi" ? est ce que "" S'il fait beau je vais nager cet après-midi" ? Qui sait. Mais P est vraie.

Considérons l'argument :

P :=" Si 32085 est divisible par 13, alors 32085^2 est divisible par $13^2 = 169$. Le nombre 32085 est divisible par 13. Par conséquent, 32085^2 est divisible par 169".

Analyse : posons p ="32085 est divisible par 13", q :="32085^2 est divisible par $13^2 = 169$". Alors $P = [(p \to q) \wedge p] \to q$.

Conclusion : P est vraie par modus ponens !

Cet argument P est incontestablement valide ! "Donc"

"Par conséquent, 32085^2 est divisible par 169".

Qu'est-ce que vous pensez ?!

Calculatrice : $\frac{32085^2}{169} = 6091403.69822....$
Hè ? ! On doit avoir fait une petite erreur quelque part !

En effet.
"Cet argument est valide, alors 32085^2 est divisible par 169"

est basée sur une contre-vérité

$$([(p \to q) \wedge p] \to q) \to q$$

(si c'est une tautologie et son hypothèse P est vraie (ce qui est le cas), alors par modus ponens, en effet q serait vraie aussi. Mais.....)

Substitutions ...

Remarque :
$(p \wedge (p \to q)) \to q$ est une proposition logique toujours vraie, n'importe les propositions p et q.

En particulier, si p est remplacé partout par une proposition logique P, et q aussi par une proposition logique Q alors l'implication reste vraie.

Exemple :
$((p \vee r) \wedge ((p \vee r) \to (q \wedge r))) \to (q \wedge r)$
est aussi vraie, n'importe p, q, r.

Règles d'inférence

Si P et Q sont deux formules logiques telles que $P \rightarrow Q$ est une tautologie, on dit que c'est une règle d'inférence et on écrit

$$P \Rightarrow Q.$$

Alors si P est vraie AUTOMATIQUEMENT aussi Q EST vraie. Mais si P est fausse, nous ne pouvons rien conclure à propos Q.

Par exemple,

$$(p \wedge (p \rightarrow q)) \Rightarrow q$$

est une règle d'inférence appelée classiquement modus ponens.

Différence entre $P \to Q$ et $P \Rightarrow Q$.

Il y a beaucoup de formules $P \to Q$, mais si P est vraie on ne peut pas conclure que Q est aussi vraie.

On le peut seulement si $P \Rightarrow Q$, pas pour les contre-vérités.

Exemple : Deux formules : $P := p \to q$ et $Q := q$. Considérons $P \to Q$!
Prenons $p :=$"$0 = 1$", $q :=$"27 est pair".

Dans ce cas : P est vraie ; est-ce que nous pouvons conclure Q est vraie aussi ? (Non)

Règles d'inférence déjà utilisés correctement par vous tous les jours :

$$p \Rightarrow (p \vee q)$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow p$$

$$(p \vee q) \wedge (\neg p) \Rightarrow q.$$

Aussi bien "connues" sont :

$$(\neg q \wedge (p \to q) \Rightarrow \neg p$$

modus tollens

et

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$$

syllogisme par hypothèse

Preuve de Modus Tollens en utilisant Modus Ponens :
$(p \wedge (p \to q)) \Rightarrow q$.

Faisons les substitutions p par $\neg q$ et q par $\neg p$ (on a le droit !) :
$(\neg q \wedge (\neg q \to \neg p)) \Rightarrow \neg p$.

Puis utilisons l'équivalence logique
$(\neg q \to \neg p) \Leftrightarrow (p \to q)$
Nous obtenons modus tollens :
$(\neg q \wedge (p \to q) \Rightarrow \neg p$.

À vous de faire une autre preuve par tableau !

Exemple d'utilisation de Modus Tollens.

"S'il fait beau je vais nager cet après-midi. Je ne vais pas nager cet après-midi. Donc il ne fait pas beau."

Cette proposition composée (ou cet argument) est vraie par modus tollens.

Mais je ne sais pas si "S'il fait beau je vais nager cet après-midi" est vraie ou fausse ! !

"S'il fait beau je vais nager cet après-midi. Si je vais nager cet après-midi, je dormirai bien ce soir. Donc s'il fait beau je dormirai bien se soir."

Cette proposition composée (ou cet argument) est vraie, par

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \Rightarrow (p \to r) \text{ (syllogisme par hypothèse)}$$

À vous de faire une preuve par tableau, ou par une preuve directe !

Combiner des inférences

On peut combiner des règles d'inférence et les équivalences logiques (en utilisant syllogisme par hypothèse) :

Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ alors aussi $P \Rightarrow R$.

Et
$P \Leftrightarrow Q$ si et seulement si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Autre exemple de l'utilisation de l'algèbre de Boole.

Considérons

$$[(p \vee q) \to r] \Leftrightarrow ((p \to r) \wedge (q \to r)).$$

Preuve algébrique :

$$\begin{aligned}
[(p \vee q) \to r] &\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r \text{ (Car } p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r \text{ (Par De Morgan)} \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \text{ (Par distr.)} \\
&\Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r) \text{ (Car } p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q)
\end{aligned}$$

Et voilà. $\square$

Rappel : on peut substituer !

Exemple : Dans l'équivalence logique

$$[(p \to r) \wedge (q \to r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \to r]$$

remplace "p" partout par $q \vee (r \to s)$ et "q" partout par $p \to s$ et r par p.
On obtient une autre équivalence (mais pas intéressante) :

$$[([q \vee (r \to s)] \to r) \wedge ([p \to s] \to p)] \Leftrightarrow [([q \vee (r \to s)] \vee [p \to s]) \to p]$$

Preuve par l'absurde ou Reductio ad absurdum

Si, en supposant qu'une proposition P soit fausse, on peut argumenter qu'une autre proposition serait simultanément vraie et fausse (une contradiction, ce qui est absurde).

Dans ce cas on aura montré que P est nécessairement vraie ! !

C'est une preuve par l'absurde, ou une preuve par contradiction.

On répète :

Supposons on veut montrer qu'une proposition p est vraie.

En supposant p est fausse, on montre une proposition auxiliaire disons q. Alors que $\neg p \to q$ est vraie.
Puis on montre (ou on sait déjà) que son opposé $\neg q$ est vraie.
Donc l'hypothèse de la règle d'inférence est vraie :

$$[(\neg p \to q) \wedge \neg q] \Rightarrow p.$$

C'est une règle d'inférence, donc aussi la conclusion p est vraie.

Une modèle de preuve :

Soit P une proposition en mathématiques.

Théorème

P

Preuve par l'absurde typique.

Supposons P est fausse. Puis (avec cette hypothèse et avec de l'aide de théorèmes déjà montrés) on montre une proposition auxiliaire, disons q. Puis on montre directement (sans utiliser l'hypothèse que P est fausse) que q est fausse. Ce qui serait absurde.

On conclut : P est vraie. $\square$

Exemple :

Théorème

Soient A et B deux ensembles et $F : A \to B$ et $G : B \to A$ deux fonctions telles que $G \circ F = 1_A$.
Alors F est injective.

Supposons $F : A \to B$ et $G : B \to A$ sont deux fonctions telles que $G \circ F = 1_A$.
Posons $P :=$"F est injective."
Montrons que P est vraie.

Preuve par l'absurde : Supposons P est faux, c.-à-d., F n'est pas injective.

Par définition d'injectivité, ils existent alors deux éléments a_1, a_2 de A telles que $F(a_1) = F(a_2)$, mais $a_1 \neq a_2$.
Parce que $G \circ F = 1_A$ on a

$$a_1 = 1_A(a_1) = G(F(a_1)) = G(F(a_2)) = 1_A(a_2) = a_2.$$

Donc sous l'hypothèse que P est fausse, on aurait montré que la proposition $a_1 = a_2$ est vraie et fausse. Ce qui est absurde.
On conclut P est vraie. $\square$

Euclide ...