Aujourd'hui nous allons discuter :

- Injectif, surjectif, bijectif.
- Une preuve cas-par-cas.
- Fonction inverse existe ssi fonction est bijective.
- Un exemple qui suggère une proposition générale, (avec preuve générale).

TP :

Un troisième TP-ist a été trouvé hier.

Section A : A-Dep, Philippe Robitaille-Grou, B-3240, Pav. 3200 J.-Brillant ;

Section B : Der-Ly , B-4270 , François Bérubé, Pav. 3200 J.-Brillant ;

Section C : Ma-Zz, Samy Nefkha-Bahri, B-4250, Pav. 3200 J.-Brillant.

Les démonstrateurs vont choisir avec vous leur période de disponiblité.

Rapper

Soit $F : A \to B$ une fonction.
(Alors pour chaque $a \in A$ il existe un (unique) $b \in B$ tel que $F(a) = b$.)

On dit que F est surjective si
l'image de F est égale au codomaine.

C-à-d. si
"pour chaque $b \in B$ il existe au moins un $a \in A$ tel que $F(a) = b$"
(est vrai).

Soit $F : A \to B$ une fonction.

On dit que F est injective si
"pour chaque $b \in B$ il existe au maximum un seul $a \in A$ tel que
$F(a) = b$"
(est vrai).

On dit que F est bijective si
"pour chaque $b \in B$ il existe exactement un $a \in A$ tel que
$F(a) = b$"
(est vrai).

Dire que F est bijective est la même chose que dire F est injective et surjective simultanément.

Surtout la notion de "fonction bijective" (ou plus court "bijection") est très importante ! ! ! !

Injective : si chaque $b \in B$ est l'image d'au maximum un seul élément de A.

Autres versions :

Injective : si et seulement si "$a, a' \in A$, $F(a) = F(a')$ implique nécessairement que $a = a'$" (est vraie).

Injective : si et seulement si "$a, a' \in A$ différents implique toujours que $F(a)$ et $F(a')$ sont aussi différents " (est vraie).

Pour une fonction donnée ce n'est pas toujours facile à vérifier si cette fonction est injective (surjective, bijective).

C'est donc normal si vous ne voyez pas tout de suite si une fonction est injective (surjective, bijective).

Mais les définitions soi-mêmes ne sont pas difficiles.

Quand-même, souvent les étudiants digèrent mal ses définitions ? !

Soit $F : A \to B$ donnée par la notation "par-deux-lignes" (sans répétitions dans la première ligne).

Comment vérifier si $F : A \to B$ est (i) injective, (ii) surjective (iii) bijective ?

Dans ce cas c'est facile !

Réponses :

(i) Injective si (et seulement si) chaque élément de B se trouve au maximum une fois sur la 2-ième ligne
(il n'y a pas de répétitions sur la 2-ième ligne) ;

(ii) Surjective si (et seulement si) chaque élément de B se trouve au minimum une fois sur la 2-ième ligne ;

(iii) Bijective si (et seulement si) chaque élément de B se trouve exactement une fois sur la 2-ième ligne.

Indices de preuves.

On a vu que les éléments de B dans la 2-ième ligne sont les images, alors forme l'image de F.

Injective si et seulement si chaque $b \in B$ est l'image d'au maximum un seul élément de A si et seulement si chaque $b \in B$ se trouve au maximum une fois sur la 2-ième ligne.

Surjective si et seulement si Codomaine=Portéé si et seulement si chaque élément de B se trouve au minimum une fois sur la 2-ième ligne

Bijective ...

Une preuve cas-par-cas

Revenons à un exemple d'hier (pour illustrer un type de preuve cas-par-cas).
La formule

$$F : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ F(m) = \frac{m(m+1)(m+5)}{3}$$

définit une fonction !

(Malgré que la partie droite semble être seulement une fraction.)

Preuve : Soit $m \in \mathbb{N}$.

Préparation :
Il existe un nombre naturel $a \in \mathbb{N}$ tel que
(i) $m = 3a$ ou (ii) $m = 3a + 1$ ou (iii) $m = 3a + 2$.

Parce que si on fait une longue division par 3 on obtient un reste 0, 1 ou 2 !
On va raisonner cas-par-cas.

En cas (i) : on a

$$F(m) = F(3a) = \frac{3a(3a+1)(3a+5)}{3} = a(3a+1)(3a+5) \in \mathbb{N};$$

En cas (ii) on a $F(m) = F(3a+1) =$

$$\frac{(3a+1)(3a+2)(3a+6)}{3} = (3a+1)(3a+2)(a+2) \in \mathbb{N};$$

En cas (iii) on a $F(m) = F(3a+2) =$

$$\frac{(3a+2)(3a+3)(3a+7)}{3} = (3a+2)(a+1)(3a+7) \in \mathbb{N};$$

Dans tous les cas $F(m) \in \mathbb{N}$.
Conclusion : $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction.

$F : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ F(m) = \frac{m(m+1)(m+5)}{3}$ est une fonction.

Surjective ? Non, parce que ...

Injective ? Oui, parce que (par les méthode de calculus) ....

Un théorème...

Théorème

Soit $F : A \to B$ une fonction.

La fonction F est bijective
si et seulement si (ou "c'est la même chose que")
il existe une fonction $G : B \to A$ telle que

$$F \circ G = 1_B \quad \textit{et} \quad G \circ F = 1_A.$$

Remarque :
Dans cette situation cette fonction G est unique, appelée la "fonction inverse de F", et notée

$$G = F^{-1}.$$

Dans ce cas, si $F^{-1}(b) = \{a\}$ (ensemble pré-image), alors $F^{-1}(b) = a$ (fonction inverse). Même notation !

Une fonction inverse de F existe si et seulement si F est bijective.

Démonstration.

(i) Supposons $F : A \to B$ est bijective.

Définition d'une fonction $G : B \to A$: Soit $b \in B$, il existe un unique $a \in A$ tel que $F(a) = b$ (car F est bijective).
Posons $G(b) := a$. On a ainsi défini une fonction.

Pour chaque $a \in A$ on a :

$$(G \circ F)(a) = G(F(a)) = G(b) = a.$$

Donc $G \circ F = 1_A$.
Et pour chaque $b \in B$:

$$(F \circ G)(b) = F(G(b)) = F(a) = b.$$

Donc $F \circ G = 1_B$.

□

Démonstration.

(ii) De l'autre côté, supposons qu'il existe une fonction $G : B \to A$ telle que $F \circ G = 1_B$ et $G \circ F = 1_A$.

Soit $b \in B$. Définissons $a := G(b) \in A$. Alors

$$F(a) = F(G(b)) = (F \circ G)(b) = 1_B(b) = b.$$

Donc a est un préimage de b pour F. Nous avons montré que F est surjective.

Supposons $a_1, a_2 \in A$ tels que $F(a_1) = F(a_2)$. Donc

$$a_1 = 1_A(a_1) = (G \circ F)(a_1) = G(F(a_1)) = G(F(a_2)) = (G \circ F)(a_2) = a_2.$$

Donc F est aussi injective.

On conclut la preuve, car une fonction surjective et injective est automatiquement bijective. $\square$

Preuve du commentaire après le théorème.

Nous montrons un peu plus :
Supposons $F : A \to B$ est bijective (ou seulement surjective).
Supposons $G : B \to A$ et $G' : B \to A$ telles que $G \circ F = G' \circ F$ (dans notre cas $= 1_A$).
Soit $b \in B$. Parce que F est surjective il existe un $a \in A$ tel que $F(a) = b$.
Alors

$$G(b) = G(F(a)) = (G \circ F)(a) = (G' \circ F)(a) = G'(F(a)) = G'(b)$$

Donc pour chaque $b \in B$ on a $G(b) = G'(b)$, c.-à-d.,

$$G = G'$$

Ainsi une telle fonction inverse est unique. $\square$

Exercice

Supposons $F : A \to B$ *est injective.*
Supposons $G : B \to A$ *et* $G' : B \to A$ *telles que* $F \circ G = F \circ G'$*.*

Montrer que dans ce cas : $G = G'$*.*

Exemple de fonction inverse.

Soit $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$ et

$$F = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors F et injective, surjective et bijective....
La fonction inverse $F^{-1} : B \to A$ est

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & b & c & a \end{pmatrix}..$$

On change simplement les deux lignes ! Compris ?

Un exemple motivant une proposition.
Soit $A := \{a, b, c\}$ et $B := \{1, 2, 3, 4\}$.

$F_1 : A \to B$ définie par $F_1 := \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est injective,

$F_2 : B \to A$ définie par $F_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & a \end{pmatrix}$ est surjective.

Il n'existe pas une fonction de A dans B qui est surjective.
Pourquoi ?
Il n'existe pas une fonction de B dans A qui est injective.
Pourquoi ?

Proposition

Soient A et B deux ensembles finis.
(i) Il existe une fonction injective $F : A \to B$ si et seulement $|A| \leq |B|$.
(ii) Il existe une fonction surjective $F : A \to B$ si et seulement si $|A| \geq |B|$.
(iii) Il existe une fonction bijective $F : A \to B$ si et seulement si $|A| = |B|$.

Ça ne veut pas dire que si $|A| \leq |B|$ alors chaque fonction $F : A \to B$ est injective.
Non, seulement qu'il existe au moins une fonction qui est injective.

Avant de commencer les preuves, fixons une suite ordonnée sans répétitions des éléments de A, disons

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

où $n = |A|$.

Il y a beaucoup de façons de le faire, mais fixons une manière.

Et aussi une suite ordonnée sans répétitions des éléments de B, disons

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$$

où $m = |B|$.

Pour (i) il faut montrer deux choses.
Supposons il existe une fonction injective $F : A \to B$. Nous voulons montrer $|A| \leq |B|$.

Dans la suite ordonnée $(F(a_1), F(a_2), \ldots, F(a_n))$ il n'y a pas de répétition.

Car sinon, il y a $i \neq j$ tels que $F(a_i) = F(a_j)$. Par la définition d'injectivité il suit que $a_i = a_j$. Mais dans la suite choisie des a_k's il n'y a pas de répétions. Donc $i = j$. Une contradiction. Donc en effet, dans la suite ordonnée $(F(a_1), F(a_2), \ldots, F(a_n))$ il n'y a pas de répétitions.

(suite)
Donc le sous-ensemble

$$\operatorname{Im}(F) = \{F(a_1), F(a_2), \ldots, F(a_n)\} \subset B$$

a exactement $n = |A|$ éléments. Et $\operatorname{Im}(F) \subset B$ implique $|A| = |\operatorname{Im}(F)| \leq |B|$.
Combiné : S'il existe une fonction injective $F : A \to B$ alors on a au moins $|A| \leq |B|$. $\square$

Deuxième partie de la preuve de (i).
Supposons $|A| \leq |B|$. Il faut montrer qu'il existe au moins une fonction injective $F : A \to B$.

Définition d'une telle fonction, à l'aide de nos deux suites ordonnées choisies :

$$F(a_i) := b_i$$

pour chaque $1 \leq i \leq n = |A|$.
Ça fait du sens, car $n \leq m = |B|$! Chaque élément de A a une unique image : notre F est une fonction.

(suite)
Une fonction injective ? Vérifions :

Soient a et a' deux éléments de A, tels que $F(a) = F(a')$.
Il existe i, j tels que $a = a_i$, $a' = a_j$. Alors $F(a_i) = F(a_j)$, c-à-d., $b_i = b_j$.
Dans la liste des b_i's il n'y a pas de répétitions. Donc $b_i = b_j$ et $i = j$ et donc

$$a = a_i = a_j = a'.$$

Nous avons vérifié que F est injective.

Si $|A| \leq |B|$, alors il existe une fonction injective $F : A \to B$. $\square$
Et aussi la preuve de (i) est complète. $\square$

Si on a montré (i) et (ii), alors (iii) en suit tout de suite.
La preuve de (ii) sera pour vous !

Un autre théorème.

Théorème

A et B deux ensembles fini non-vides. Posons $n = |A|$. Il existe une fonction bijective *$\phi : Fonctions(A, B) \to B^n$.*

Corollaire

A et B deux ensembles fini non-vides. Posons $n = |A|$. On a $|Fonctions(A, B)| = |B^n|$.

Le corollaire est conséquence du théorème et de la proposition qui dit que s'il existe une fonction bijective entre deux ensembles A et B, alors $|A| = |B|$.

Démonstration.

Fixons une liste ordonnée des éléments de A, sans répétitions, disons $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

$$\phi : \text{Fonctions}(A, B) \to B^n$$

$$\phi\left(F = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_n \end{pmatrix}\right) := (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n) \in B^n.$$

ϕ a la fonction inverse $\psi = \phi^{-1}$:

$$\psi : B^n \to \text{Fonctions}(A, B)$$

$$\psi((b_1, b_2, \ldots, b_n)) := F = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$$

$\square$