Aujourd'hui nous allons discuter :

- T.P.
- Constructions d'ensembles.
- Fonctions. Notation deux lignes.
- Injectivité, surjectivité, bijectivité.

TP :Si on ne trouve pas un troisième TP-ist, on doit réarranger jeudi.

Section A : A-Dep, Philippe Robitaille-Grou, B-3240, Pav. 3200 J.-Brillant ;

Section B : Der-Ly , B-4270 , François Bérubé, Pav. 3200 J.-Brillant ;

Section C : Ma-Zz, ? ?, B-4250, Pav. 3200 J.-Brillant.

Les démonstrateurs vont choisir avec vous leur période de disponiblité.

Constructions avec les ensembles.

Les ensembles sont très flexibles. On peut construire des ensembles à partir de quelques ensembles donnés. Comme $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres naturels, ou un de ses sous-ensembles.

Rappel :

Definition (des suites)

Soit E un ensemble et $n > 0$ un entier. On définit E^n comme l'ensemble des suites ordonnées $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de longueur n d'éléments de E.

Ici : l'ordre des coefficients importe, et les répétitions sont permises !

Ex. $(1, 2, 2) \in \mathbb{N}^3$ et $(1, 2, 2) \neq (2, 1, 2) \neq (1, 2)$;

mais $\{1, 2, 2\} \subset \mathbb{N}$ et $\{1, 2, 2\} = \{2, 1, 2\} = \{1, 2\}$.

Exemples :

$\{0,1\}^3 =$
$\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

$\{a,b,c\}^2 =$
$\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}.$

Une variation.

Definition

Soient A et B deux ensembles. On définit le produit cartésien

$$A \times B$$

comme l'ensemble des suites ordonnées (a, b) de longueur 2, où $a \in A$ et $b \in B$.

Alors $E^2 = E \times E$. Exemple :

$$\{a, b\} \times \{1, 2, 3\} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

On peut répéter.

Exemple. Nous pouvons modéliser le montre digital comme un produit Cartésien répété. Définissons :

$$\text{Heures} := \{00, 01, 02, \ldots, 23\}$$

$$\text{Minutes} := \{00, 01, 02, \ldots, 59\}$$

$$\text{Secondes} := \{00, 01, 02, \ldots, 59\}$$

$$\text{Montre} := \text{Heures} \times \text{Minutes} \times \text{Secondes}.$$

$$(10, 35, 29) \text{ (ou } (10h\ 35m\ 29s)) \in \text{Montre}$$

Vous comprenez ?

Et

$$\text{Valeurs} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R, A\}$$

(V= valet, D=dame, R=roy, A=as).

$$\text{Enseignes} = \{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$$

$\heartsuit$ = coeur (hearts), $\clubsuit$ = trèfle (clubs), $\diamondsuit$ = carreau (diamonds), $\spadesuit$ = pique (spades).

$$\text{Jeu de Cartes} = \text{Valeurs} \times \text{Enseignes}.$$

Exemple : $(2, \heartsuit) = 2\heartsuit$ et $A\clubsuit$ sont deux éléments du Jeu de Cartes.

Si A et B sont des ensembles finis alors

$$|A \times B| = |A| \times |B|.$$

Vous voyez pourquoi ?

Simple, mais difficile à digérer :

Definition (Ensemble des parties)

Soit E un ensemble. On note

$$P(E)$$

pour l'ensemble des sous-ensembles de E.

Donc un élément de $P(E)$ est par définition un sous-ensemble de E.

Donc $\emptyset \in P(E)$ car $\emptyset \subset E$. Aussi $E \in P(E)$.

Exemple :

$$P(\{1,2,3\}) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

ex. $\{1,2,3\} \in P(\{1,2,3\})$.

Autre exemple :

$\emptyset$ (avec 0 éléments).

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

(avec UN seul élément).

$$P(P(\emptyset)) = P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

(avec deux éléments).

$$P(P(P(\emptyset))) = P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$$

(avec quatre éléments).

Vous comprenez ?

Imposer une condition sur les éléments donne des sous-ensembles.
Exemple :

$$\{n \in \mathbb{N} | n \text{ est pair}\} \subset \mathbb{N}$$

est le sous-ensemble des nombre pairs.
Le symbol $|$ veut dire "tel que la condition suivante est satisfaite".

Exemple

$$\{(n, m) \in \mathbb{N}^2 | n \neq m\}$$

est le sous-ensemble des suites de deux nombres naturels différents.

Mais la théorie d'ensembles devient seulement vraiment utile si on ajoute les fonctions.

La théorie devient dynamique !

Definition (Fonction)

Soient A et B deux ensembles. Une fonction F de A dans B, notation

$$F : A \to B,$$

est l'affectation d'exactement un élément de B, noté

$$F(a) \in B,$$

attribué par F à $a \in A$, et ça pour chaque $a \in A$.

On dit aussi "application" à la place de "fonction".
Donc à chaque $a \in A$ exactement une seule $F(a) \in B$ est attachée.

Soit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots$ l'ensemble des nombres naturels.
Alors $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $F(n) := n + 1$ est une fonction.
Mais $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $F(n) := n - 1$ n'est pas une fonction.

Exemple non-classique :
$A :=$ l'ensemble de tous les personnes ;

$P(A) :=$ l'ensemble des ensembles de personnes.

La fonction

$$\text{Enfants} : A \to P(A)$$

associe à chaque personne l'ensemble de ses enfants vu comme élément de $P(A)$

Supposons Pierre a deux enfants, disons Chantal et Claude . Supposons Chantal n'a pas d'enfant. Alors

$$\text{Pierre } \in A, \text{Chantal } \in A$$

et

$$\text{Enfants(Pierre)} = \{\text{Chantal }, \text{Claude }\} \in P(A)$$

$$\text{Enfants(Chantal)} = \{\} \in P(A)$$

Soit $F : A \to B$ une fonction.
Alors A est appelé le domaine de F, et B le codomaine.
Si $b = F(a)$ on dit :

- b est "l'image de a par F"
- a est une pré-image de b.

Donc F est une règle que définit pour chaque $a \in A$ une unique image dans B.

La collection de tous les images de F, l'image de F ou la portée de F, est noté $\operatorname{Im} F$:

$$\operatorname{Im}(F) = \{F(a) |\ a \in A\} \subset B.$$

Il y a une différence entre "codomaine" et "portée" !

La portée est un sous-ensemble du codomaine, mais n'est pas nécessairement $=$.
(On dit que la fonction est surjective si la portée est égale au codomaine.)

L'ensemble des primages d'un élément

Soit $F : A \to B$ une fonction.

• Si $a \in A$, il existe un unique $b \in B$ tel que $b = F(a)$.

• Si $b \in B$, il existe possiblement plusieurs (ou pas du tout) de $a \in A$ tel que $b = F(a)$.

Definition

Si $b \in B$, le sous-ensemble des préimages de b est noté

$$F^{-1}(b) := \{a \in A; F(a) = b\}.$$

Généralisation :

Soit encore $F : A \to B$ une fonction. Si $U \subset B$ alors

$$F^{-1}(U) := \{a \in A | \ F(a) \in U\}.$$

Donc pour $b \in B$:

$$F^{-1}(b) = F^{-1}(\{b\}).$$

Soit $F : A \to B$ et $G : X \to Y$ deux fonctions.

Definition

On écrit

$$F = G$$

si $A = X$ et $B = Y$ et pour chaque $a \in A$:

$$F(a) = G(a).$$

Alors $F \neq G$ si leurs domaines sont différentes ou leurs codomaines sont différents ou il existe un élément du domaine, disons a, tel que $F(a) \neq G(a)$.
D'accord ?

Remarque : Il y a beaucoup de fonctions différentes de A dans B.

Nous montrons plus tard : il y en a $|B|^{|A|}$ si A et B sont finis.

En calcul, les fonctions sont souvent définies par une formule.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := x^2 + x + 1$.

En algèbre linéaire on utilise souvent des matrices 2×2 pour définir des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

En mathématiques discrètes on utilise surtout autres notations.

On définit souvent une fonction F "élément par élément".

Par exemple, une fonction

$$F : \text{Chiffres} \to \text{Alphabet},$$

est définie par

$F(0) := a, F(1) := b, F(2) = a, F(3) := z, F(4) := y, F(5) := c, F(6) := a, F(7) := x, F(8) := t, F(9) := o.$

L'important est : il faut définir pour chaque chiffre une seule lettre.

Il existe une notation pratique : la notation de deux lignes. La même fonction F : Chiffres $\rightarrow$ Alphabet

$$F := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ a & b & a & z & y & c & a & x & t & o \end{pmatrix}$$

La première ligne donne une liste des éléments du domaine de la fonction.

La deuxième ligne donne les images correspondantes. En bas de 4 se trouve y, ça veut dire $F(4) := y$.

Remarquez deux choses :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ a & b & a & z & y & c & a & x & t & o \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ o & b & a & z & y & c & a & x & t & a \end{pmatrix}$$

La deuxième ligne donne la portée de F (avec répétitions)

$$\mathrm{Im}(F) = \{a, b, a, z, y, c, a, x, t, o\} = \{a, b, z, y, c, x, t, o\}$$

Par exemple $q \notin \mathrm{Im}\, F$, car q n'a aucun préimage.

$$F^{-1}(a) = \{2, 6, 0\},\ F^{-1}(q) = \emptyset.$$

Permissible pour une fonction ? Permise !

Autres fonctions :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ a & a & a & a & a & a & a & x & t & z \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ a & b & a & b & a & b & a & b & a & b \end{pmatrix}$$

(ou $H(x) = a$ si le chiffre x est pair, et $H(x) = b$ si x est impair)

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ a & a & a & a & z & z & z & z & z & z \end{pmatrix}$$

(ou $K(x) = a$ si le chiffre x est ≤ 3, et $K(x) = z$ si x est > 3.)

....

Soit $F : A \to B$ un fonction. Si $b \in B$ nous avons défini

$$F^{-1}(b) := \{a \in A |\ F(a) = b\}.$$

Ici F^{-1} N'EST PAS LA FONCTION INVERSE de calcul !
On discutera de la fonction inverse encore (si elle existe !)

En fait $F^{-1}(b)$ n'est pas un élément de A.

Mais F^{-1} associe à chaque $b \in B$ un certaine sous-ensemble de A, et pas seulement un élément de A.
Et souvent $F^{-1}(b) = \emptyset$, l'ensemble vide.
On a $F^{-1}(b) \subset A$, on on peux écrire
$F^{-1}(b) \in P(A)$!

En fait F^{-1} est une fonction, mais avec codomaine $P(A)$) :

$$F^{-1} : B \to P(A)$$

En math on définit souvent une fonction par un formule classique.
Vous avez l'habitude.
(Rappel : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{R}$ les nombres réels.)
Exemple :

$$F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \; F(m) = m^2 + 1$$

est une fonction.

Mais

$$F : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \ F(m) = m^2 - 1$$

n'est pas une fonction (parce que ....)

Mais

$$F : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ \ F(m) = \frac{1}{m}$$

n'est pas une fonction (parce que ....)

Est-ce que

$$F : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ F(m) = \frac{m(m+1)(m+5)}{3}$$

est une fonction ? (Oui, ..., mais ça prend une preuve.)

Définir une fonction par un dessin est possible.

Le risque est élevé que votre dessin ne représente pas une fonction.

Soit $A = \{a, b, c, d, e\}$ et $B = \{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$

Exemple :

Non-exemple :

Ou définir par son graphe (une partie de $A \times B$) comme on fait dans les cours de calculus. (Mais pas souvent dans les math. discrètes.)
Le graphe Graphe(F) d'une fonction $F : A \to B$ est

$$\text{Graphe}(F) := \{(a, b) \in A \times B |\ F(a) = b\}$$

Exemple, le graphe de $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + 1$:

Fonctions identité et inclusion

Soit A un ensemble.
La fonction identité est la fonction $1_A : A \to A$ où

$$1_A(a) = a$$

pour chaque $a \in A$.
Si

$$A = \{a, 1, \heartsuit, \pi, \emptyset\},$$

alors

$$1_A = \begin{pmatrix} a & 1 & \heartsuit & \pi & \emptyset \\ a & 1 & \heartsuit & \pi & \emptyset \end{pmatrix}$$

Soit $A \subset B$ un sous-ensemble.
La fonction inclusion est la fonction $\iota : A \to B$:

$$\iota(a) = a$$

pour chaque $a \in A$.
Si

$$A = \{a, 1, \heartsuit, \pi, \emptyset\},\ \ B = \{a, b, c, 1, 2, 3, \heartsuit, \clubsuit, \pi, \emptyset, \}$$

alors

$$\iota_A = \begin{pmatrix} a & 1 & \heartsuit & \pi & \emptyset \\ a & 1 & \heartsuit & \pi & \emptyset \end{pmatrix}$$

Différence ? Le codomaine est différent (mais la portée et le formule sont les mêmes).

Definition

Soit $F : A \to B$ une fonction et $G : B \to C$ deux fonctions. Alors la composition est la fonction

$$G \circ F : A \to C$$

définie par

$$(G \circ F)(a) = G(F(a)).$$

Ex :

$$F : \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c\} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & a \end{pmatrix}$$

$$G : \{a,b,c\} \to \{1,2,3,4,5\} : \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$G \circ F : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5\}$$

$$G \circ F = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Par exemple

$$(G \circ F)(4) = G(F(4)) = G(a) = 3.$$

Soit $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $F(n) = n^2 + 1$.
Soit $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $G(n) = n^3 + n$.

$F \circ G =$? Réponse :
$(F \circ G)(n) = F(G(n)) = F(n^3 + n) = (n^3 + n)^2 + 1.$

$G \circ F =$?. Réponse :
$(G \circ F)(n) = G(F(n)) = G(n^2 + 1) = (n^2 + 1)^3 + (n^2 + 1).$

Est-ce que $F \circ G = G \circ F$? Réponse :
Non, parce que $(F \circ G)(0) = 1 \neq 2 = (G \circ F)(0)$.