Aujourd'hui nous allons discuter :

- Les connecteurs de la logique
- Tautologie, Contradiction, Formules équivalentes
- Tautologies simples (règles de De Morgan)
- ... et ses preuves par tableaux
- Convention de l'utilisation de (et).
- Quelques équivalences logiques souvent utilisées

Implication

Par definition l'implication $p \to q$ est vraie

si :

(i) p et q sont vraies.

ou si

(ii) p est fausse (et q ? sans importance : "je m'en fous")

Biconditionnel

Par définition la biconditionnelle $p \leftrightarrow q$ est vraie

si :

(i) p et q sont tous les deux vraies

ou si

(ii) p et q sont tous les deux fausses.

Quoi dire de la vérité de p et q si $p \to q$ est fausse ?

Nécessairement :

p est vraie et q est fausse.

Quoi dire de la vérité de p et q si $p \leftrightarrow q$ est fausse ?

Nécessairement :

(i) p est vraie et q est fausse
ou
(ii) p est fausse et q est vraie.

(Et v.v., par définition)

Posons $n := 123456789$.

Deux propositions logiques :
$p :=$"n est un nombre premier" ;
$q :=$"n est un nombre impair".

Alors considérons
$p \to q =$"Si n est un nombre premier alors n est un nombre impair".
$=$"n est un nombre impair si n est un nombre premier".

(Vraie , ici n n'est pas variable !)

Variation :

Deux fonctions propositionnelles avec univers de discours les nombres naturels positifs.

$p(n)$:="n est un nombre premier"
$q(n)$:="n est un nombre impair".

Alors considérons

$\forall n[p(n) \to q(n)] =$
="Pour chaque nombre naturel positif n on a que si n est un nombre premier alors n est un nombre impair"
="Si n est un nombre premier alors n est un nombre impair".
(Fausse, ici n est variable !)

Tous ces définitions en forme de tableaux (V=vrai, F=faux).
Pour la négation :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Pour les autres définitions :

p	q	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	F	F	F	V	V

Maintenant nous pouvons commencer à combiner trois propositions ou plus....
Supposons p,q, r sont trois propositions.
Alors

$$P := ((\neg q) \wedge (p \vee r)) \rightarrow p$$

est aussi une proposition.

Vraie pour quelles valeurs de vérité de p, q et r ?

Exemple, si $p = F$, $q = F$ et $r = V$?

Alors $\neg q = V$ et
$p \vee r = V$ et donc
$((\neg q) \wedge (p \vee r) = V$. Mais $p = F$ donc
$(((\neg q) \wedge (p \vee r)) \rightarrow p) = F$.

Dans cette situation P sera faux.
Nous pouvons faire toutes les huit possibilités de vérités.

Les vérités de $((\neg q) \wedge (p \vee r)) \to p$ en forme de tableau :

p	q	r	$\neg q$	$p \vee r$	$(\neg q) \wedge (p \vee r)$	$((\neg q) \wedge (p \vee r)) \to p$
V	V	V	F	V	F	V
V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	F
F	F	F	V	F	F	V

Alors P est faux si et seulement si
(p et q sont faux et r est vraie) si et seulement si
$((\neg p) \wedge (\neg q)) \wedge r)$ est vraie.

$P := ((\neg q) \wedge (p \vee r)) \to p.$

Conclusion : P est faux si et seulement si $((\neg p) \wedge (\neg q)) \wedge r)$ est vraie.

Ou P est vraie si et seulement si $\neg\, ((\neg p) \wedge (\neg q)) \wedge r)$ est vraie. est vraie.

Posons $Q := \neg\, ((\neg p) \wedge (\neg q)) \wedge r)).$

On dit P et Q sont logiquement équivalent, $P \Leftrightarrow Q$.

Soit P, Q comme avant. Et soit $R = (p \vee q) \vee (\neg r)$.
On obtient un nouveau tableau :

p	q	r	$p \vee q$	$\neg r$	R	P	Q
V	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	V	V	V	V

Conclusion : P, Q et R ont la même vérité, n'importe les valeurs de p, q, r.
P, Q et R sont des propositions composées logiquement équivalentes.

Reformulation :

On devrait voir

$$P = P(p, q, r),\ \ Q = Q(p, q, r),\ \ R = R(p, q, r)$$

comme trois formules logiques (ou trois fonctions) qui dépendent des propositions logiques p, q, r.

Exemple.
Par définition directe :
$p \leftrightarrow q$ est la même chose que $(\neg p) \leftrightarrow (\neg q)$.
Ou $p \leftrightarrow q$ et $(\neg p) \leftrightarrow (\neg q)$ sont logiquement équivalentes.

Les connecteurs

Soient p, q deux propositions logiques quelconques.
Nous avons défini les propositions logiques

$$p \wedge q,\ \ p \vee q,\ \ p \rightarrow q,\ \ p \leftrightarrow q,\ \ \neg p,$$

(et aussi le "ou-strict" $p \oplus q$).

Pour les fonctions propositionnelles on a : $\forall$ et $\exists$.

Nous n'aurons pas besoins d'autres connecteurs.

Respecter notre Convention

Il faut adopter les notations du cours ! Exemples :

Il faut utiliser $\neg p$ (et pas $\overline{p}$ ou $-p$).
Et pas confondre $\vee$ et $\cup$, ou $\wedge$ et $\cap$.
Et Vraie (ou V) et Fausse (ou F) (et pas 1 et 0).
Et $\rightarrow$ (et pas $\Rightarrow$).
Et $\leftrightarrow$ (et pas $\Leftrightarrow$).

Les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ ne sont pas définis encore ! !

On a parlé de la formule (ou proposition composée) :

$$P = P(p, q, r) := ((\neg q) \wedge (p \vee r)) \to p$$

où p, q, r sont des propositions logiques.

Tableau de vérité de P :

p	q	r	$\neg q$	$p \vee r$	$(\neg q) \wedge (p \vee r)$	$((\neg q) \wedge (p \vee r)) \rightarrow p$
V	V	V	F	V	F	V
V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	F
F	F	F	V	F	F	V

On a "vu" que P et

$$Q = Q(p, q, r) = \neg\left(((\neg p) \wedge (\neg q)) \wedge r)\right)$$

ont les mêmes vérités.

Avec P et Q comme avant. Discutons $P \leftrightarrow Q$:

p	q	r	P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V

La proposition logique composée $P \leftrightarrow Q$ est toujours vraie, pour tous les valeurs de vérité de p, q et r.
On dit $P \leftrightarrow Q$ est une tautologie, notation $P \Leftrightarrow Q$.

Definition

Une proposition logique composée qui est toujours vraie, quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui la composent, est appelée une tautologie.

Si P est une tautologie, on écrit $P \Leftrightarrow V$
(Ici V=une proposition vraie).

Exemples :

$p \vee (\neg p)$ est une tautologie, ou

$$p \vee (\neg p) \Leftrightarrow V.$$

Aussi

$$((p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)) \Leftrightarrow V.$$

Definition

Une proposition logique composée qui est toujours fausse, quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui la composent, est appelée une contradiction.

Si P est une contradiction on écrit $P \Leftrightarrow F$
(où F est une proposition fausse).

Exemple :

$$(p \wedge (\neg p)) \Leftrightarrow F.$$

Definition

Deux propositions logiques composées P et Q sont appelées logiquement équivalentes si la proposition logique $P \leftrightarrow Q$ est une tautologie.

Dans se cas on écrit $P \Leftrightarrow Q$.

Alors c'est le cas si P vraie si et seulement Q est vraie, n'importe les valeurs de vérité des composantes simples.

Une liste d'équivalences logiques simples utlisées tout le temps :

$$p \vee p \Leftrightarrow p \text{ (Idempotence)}$$

$$p \wedge p \Leftrightarrow p \text{ (Idempotence)}$$

$$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p \text{ (Loi de la double négation)}$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \text{ (Commutativité)}$$

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \text{ (Commutativité)}$$

$$((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r)) \text{ (Associativité)}$$

$$((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r)) \text{ (Associativité)}$$

$$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))) \text{ (Distributivité)}$$

$$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))) \text{ (Distributivité)}$$

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q)) \text{ (Loi de De Morgan)}$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q) \text{ (Loi de De Morgan)}$$

La plupart des preuves est facile. Deux exemples de preuve-par-tableau :
Si $P := p \vee (q \wedge r)$ et $Q := (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ on a

p	q	r	$q \wedge r$	P	$p \vee q$	$p \vee r$	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

La dernière colonne montre que $P \Leftrightarrow Q$. $\square$

Montrons

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q)).$$

Soit $P = \neg(p \wedge q)$ et $Q = ((\neg p) \vee (\neg q))$. On a

p	q	$p \wedge q$	P	$\neg p$	$\neg q$	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

La dernière colonne montre que $P \Leftrightarrow Q$ (un des deux lois de De Morgan). $\square$

Ajoutons quelques règles évidentes :

- $p \wedge V \Leftrightarrow p$,
- $p \vee F \Leftrightarrow p$ ("Identité") ;
- $p \vee V \Leftrightarrow V$,
- $p \wedge F \Leftrightarrow F$ ("Domination").

Ici V veux dire une proposition logique vraie, et
F veux dire une proposition logique fausse.

A propos de l'utilisation des parenthèses (et) (et [,] etc).

Nous avons montré l'associativité :

$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r.$$

Logiquement il n'y a pas de confusion possible : on a le droit d'écrire $p \vee q \vee r$.

Aussi $p \wedge q \wedge r$ est sans ambiguité.

Mais $p \vee q \wedge r$ est ambigue !
Parce que

$$(p \vee q) \wedge r$$

et

$$p \vee (q \wedge r)$$

sont deux choses logiquement différentes (non-équivalentes).

Nous ne posons pas de convention de priorité entre $\vee$ et $\wedge$!

Il faut continuer d'utiliser les $($, $)$ dans ce cours !

Seulement :

par convention $\neg$ aura plus haute priorité que les autres opérations logiques.

Par exemple :

$\neg p \to q$ veut dire $(\neg p) \to q$ et non $\neg(p \to q)$.

Ce sont les seules conventions de ce cours à propos de priorité d'opérations logiques. Pour le reste il faut utiliser les $(,)$.

Quelques équivalences moins simples souvent utilisées

Une équivalence utilisée souvent en mathématiques :

$$(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)) .$$

En mots : $P \leftrightarrow Q$ est vraie si et seulement si $P \rightarrow Q$ et sa réciproque $Q \rightarrow P$ sont vraies.

(Comparer avec le théorème du sandwich, dans la théorie des ensembles.)

Preuve par une vérification par tableau.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

En effet, colonnes 3 et 6 sont identiques. $\square$

Deux autres exemples d'équivalence, très importants pour nous :

$$(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$$

(une implication est équivalente à sa contraposé)
et

$$(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

Preuve par une vérification par tableau.

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$(\neg Q) \to (\neg P)$	$(\neg P \vee Q)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

En effet, colonnes 3, 6 et 7 sont identiques. $\square$

Preuves pas algèbre

À la place d'utiliser un tableau pour vérifier une équivalence logique, on peut aussi utiliser les petites (ou grandes) équivalences déjà montrées, comme en algèbre.

Un exemple suffit pour comprendre, peut-être.

Montrons que $P := ((\neg q) \wedge (p \vee r)) \to p$ et $Q := (p \vee (q \vee (\neg r)))$ sont équivalentes :

$$
\begin{aligned}
P &\Leftrightarrow (\neg((\neg q) \wedge (p \vee r))) \vee p \text{ (Car } (p \to q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q))\\
&\Leftrightarrow (\neg(\neg q) \vee \neg(p \vee r))) \vee p \text{ (Selon De Morgan)}\\
&\Leftrightarrow (q \vee \neg(p \vee r))) \vee p \text{ (Double négation)}\\
&\Leftrightarrow (q \vee ((\neg p) \wedge (\neg r))) \vee p \text{ (Selon De Morgan)}\\
&\Leftrightarrow q \vee (((\neg p) \wedge (\neg r)) \vee p) \text{ (Assoc. pour } \vee)\\
&\Leftrightarrow q \vee (p \vee ((\neg p) \wedge (\neg r))) \text{ (comm. pour } \vee)\\
&\Leftrightarrow q \vee ((p \vee (\neg p)) \wedge (p \vee (\neg r))) \text{ (Distrib.)}\\
&\Leftrightarrow q \vee (V \wedge (p \vee (\neg r))) \text{ (Selon } (p \vee (\neg p)) \Leftrightarrow V)\\
&\Leftrightarrow q \vee (p \vee (\neg r)) \text{ (Selon } (V \vee p) \Leftrightarrow p)\\
&\Leftrightarrow (q \vee p) \vee (\neg r) \text{(Assoc. de } \vee)\\
&\Leftrightarrow (p \vee q) \vee (\neg r) \text{ (Commut. de } \vee)\\
&\Leftrightarrow Q \text{ (Assoc. de } \vee)
\end{aligned}
$$

L’algèbre (de Boole) est utilisé en programmation...