4.2. **Tableau de vérité.** Nous présentons ces définitions en forme de tableaux de vérité, où V:=vrai, et F:=faux.

Pour la négation:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Pour les autres définitions:

p	q	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \wedge q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	F	F	F	V	V

4.3. **Propositions logiques composées.** Commençons maintenant à combiner. Si p, q et r sont trois propositions logiques, alors

$$P := ((\neg q) \wedge (p \vee r)) \to p$$

est aussi une proposition logique. La valeur de vérité de P dépend des valeurs de vérité de p, q et r. Comment exactement montre le tableau suivant (qui montre aussi des calculs de vérité intermédiaires) :

p	q	r	$\neg q$	$p \vee r$	$(\neg q) \wedge (p \vee r)$	$((\neg q) \wedge (p \vee r)) \to p$
V	V	V	F	V	F	V
V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	F
F	F	F	V	F	F	V

En regardant la dernière colonne on se rend compte que P est faux si et seulement si p est faux et q est faux et r est vraie, ou en formule que

$$(\neg p) \wedge ((\neg q) \wedge r))$$

est vraie.

Ou que P est vraie si et seulement si

$$\neg ((\neg p) \wedge ((\neg q) \wedge r))$$

est vraie.

Posons $Q := \neg ((\neg p) \wedge ((\neg q) \wedge r))$ et calculons de nouveau ses valeurs de vérité :

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg q) \wedge r)$	$((\neg p) \wedge ((\neg q) \wedge r))$	Q
V	V	V	F	F	F	F	V
V	V	F	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	F
F	F	F	V	V	F	F	V

Considérons aussi la proposition $R = p \vee (q \vee (\neg r)$. On peut aussi calculer son tableau.

p	q	r	P	Q	R
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V

Conclusion : les propositions composées P, Q et R ont la même valeur de vérité, n'importe les valeurs de p, q,r. On dit P, Q et R sont des propositions composées (ou formules logiques) *logiquement équivalentes*.

Calculons aussi les vérités de la proposition $P \leftrightarrow Q$:

p	q	r	P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V

On voit que la proposition logique composée $P \leftrightarrow Q$ est toujours vraie, pour tous les valeurs de vérité de p, q et r. On dit $P \leftrightarrow Q$ est une *tautologie*, notation $P \Leftrightarrow Q$.

4.4. **Tautologie et contradiction.** Nous généralisons.

Définition 4.2. *Une proposition logique composée (ou une formule logique) qui est toujours vraie, quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui la composent, est appelée une tautologie. Notation :* $P \Leftrightarrow V$.

Par exemple: $p \vee (\neg p) \Leftrightarrow V$ et $((p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)) \Leftrightarrow V$.

Définition 4.3. *Une proposition logique composée (ou une formule logique) qui est toujours fausse, quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui la composent, est appelée une contradiction. Notation :* $P \Leftrightarrow F$

Par exemple : $p \wedge (\neg p) \Leftrightarrow F$.

Définition 4.4. *Deux formules logiques* P *et* Q *sont appelées* logiquement équivalentes *si la proposition logique* $P \leftrightarrow Q$ *est une tautologie. Notation :* $P \Leftrightarrow Q$.

Par exemple: $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)]$.

Définition 4.5. *Si* $P \to Q$ *est une tautologie, où* P *et* Q *sont deux formules logiques, on dit que* $P \to Q$ *est une* règle d'inférence*. Notation* $P \Rightarrow Q$.

Par exemple: $(p \wedge q) \Rightarrow q$.

4.5. **Propositions logiquement équivalents à l'implication.** Considérons la proposition suivante.

Proposition 4.1. *Les trois formules logiques "*$p \to q$*", "*$(\neg q) \to (\neg p)$*" et "*$(\neg p) \vee q$*" sont logiquement équivalentes. Ou*

$$(p \to q) \Leftrightarrow ((\neg q) \to (\neg p)) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q).$$

Proof. Nous vérifions par un tableau de vérité.

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$(\neg q) \to (\neg p)$	$(\neg p \vee q)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Les trois colonnes correspondantes sont identique. Donc la proposition est vraie. □

4.6. **Formules logiquement équivalentes.** Donnons une petite reformulation. On pourrait voir

$$P = P(p, q, r),\ Q = Q(p, q, r),\ R = R(p, q, r)$$

comme trois formules ou comme trois fonctions qui dépendent des propositions logiques p, q, r. Par exemple

$$P : \{\text{propositions logiques}\}^3 \to \{\text{propositions logiques}\}$$

où le triple de propositions (p, q, r) est envoyé vers la proposition $P = P(p, q, r)$.

Par définition: P et Q sont logiquement équivalentes si les fonctions composées avec la fonction "vérité" deviennent identiques:

$$\text{"vérité"} \circ P = \text{"vérité"} \circ Q.$$

Si A et B sont deux ensembles et $b \in B$ un élément fixé, on peut définir la *fonction constante*, souvent aussi noté b, comme la fonction qui associe à chaque élément $a \in A$ ce même élément b (ou $b(a) = b$). Dans le même sens nous considérons V comme la proposition composée (ou formule logique) qui a la valeur de vérité V n'importe les valeurs de p, q, r. Et de même pour F.

4.7. **Équivalences logiques de base.** Une première liste d'équivalences logiques utilisées tout le temps :

Théorème 4.1. *Voici des équivalences logiques :*

$$
\begin{array}{rcl}
p \wedge V & \Leftrightarrow & p \ \textit{(Identité)} \\
p \vee F & \Leftrightarrow & p \ \textit{(Identité)} \\
p \vee V & \Leftrightarrow & V \ \textit{(Domination)} \\
p \wedge F & \Leftrightarrow & F \ \textit{(Domination)} \\
p \vee p & \Leftrightarrow & p \ \textit{(Idempotence)} \\
p \wedge p & \Leftrightarrow & p \ \textit{(Idempotence)} \\
\neg(\neg p) & \Leftrightarrow & p \ \textit{(Loi de la double négation)} \\
p \wedge q & \Leftrightarrow & q \wedge p \ \textit{(Commutativité)} \\
p \vee q & \Leftrightarrow & q \vee p \ \textit{(Commutativité)} \\
((p \vee q) \vee r) & \Leftrightarrow & (p \vee (q \vee r)) \ \textit{(Associativité)} \\
((p \wedge q) \wedge r) & \Leftrightarrow & (p \wedge (q \wedge r)) \ \textit{(Associativité)} \\
(p \vee (q \wedge r)) & \Leftrightarrow & ((p \vee q) \wedge (p \vee r))) \ \textit{(Distributivité)} \\
(p \wedge (q \vee r)) & \Leftrightarrow & ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))) \ \textit{(Distributivité)} \\
\neg(p \wedge q) & \Leftrightarrow & ((\neg p) \vee (\neg q)) \ \textit{(Loi de De Morgan)} \\
\neg(p \vee q) & \Leftrightarrow & ((\neg p) \wedge (\neg q) \ \textit{(Loi de De Morgan)}
\end{array}
$$

Proof. La plupart des preuves est facile: il faut soi-même se convaincre! Nous donnons deux exemples de preuve par tableau :

Si $P := p \vee (q \wedge r)$ et $Q := (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ on a

p	q	r	$q \wedge r$	P	$p \vee q$	$p \vee r$	Q
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Effectivement $P \Leftrightarrow Q$ (un des deux lois de la distributivité).

Montrons $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$ (Loi de De Morgan). Soit $P = \neg(p \wedge q)$ et $Q = ((\neg p) \vee (\neg q))$. On a

p	q	$p \wedge q$	P	$\neg p$	$\neg q$	Q
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Effectivement $P \Leftrightarrow Q$. □

4.8. **Preuve d'equivalences logiques par de l'algèbre.** Remarquons tout d'abord que si P, Q et R sont trois formules logiques (ou propositions composées) et $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow R$ alors aussi $P \Leftrightarrow R$. (Et si $P \Leftrightarrow Q$ alors aussi $Q \Leftrightarrow P$ (c.-à.d., l'équivalence logique est symmétrique), et on a toujours $P \Leftrightarrow P$.)

Donc on peut enchaîner des équivalences logiques pour obtenir d'autres.

Nous avons déjà un certain nombre d'équivalence montrées, que nous pouvons utiliser. À la place d'utiliser un tableau pour vérifier une équivalence logique, on peut aussi utiliser les petites règles déjà montrées, comme en algèbre.

Donnons un exemple. La proposition soi-même est sans importance.

Proposition 4.2. *Soit* $P := ((\neg q) \wedge (p \vee r)) \to p$ *et* $Q := (p \vee (q \vee (\neg r)))$. *On a* $P \Leftrightarrow Q$.

Proof. Nous allons utiliser une suite d'équivalences logiques (avec les raisons)

$$\begin{aligned}
P &\Leftrightarrow (\neg((\neg q) \wedge (p \vee r))) \vee p \text{ (Car } (p \to q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q))\\
&\Leftrightarrow (\neg(\neg q) \vee \neg(p \vee r))) \vee p \text{ (Selon De Morgan)}\\
&\Leftrightarrow (q \vee \neg(p \vee r))) \vee p \text{ (Double négation)}\\
&\Leftrightarrow (q \vee ((\neg p) \wedge (\neg r))) \vee p \text{ (Selon De Morgan)}\\
&\Leftrightarrow q \vee (p \vee ((\neg p) \wedge (\neg r))) \text{ (Assoc. et comm. pour } \vee)\\
&\Leftrightarrow q \vee ((p \vee (\neg p)) \wedge (p \vee (\neg r))) \text{ (Distrib.)}\\
&\Leftrightarrow q \vee (V \wedge (p \vee (\neg r))) \text{ (Selon } (p \vee (\neg p)) \Leftrightarrow V)\\
&\Leftrightarrow q \vee (p \vee (\neg r)) \text{ (Selon comm. et } (p \wedge V) \Leftrightarrow p)\\
&\Leftrightarrow Q \text{ (Assoc. et commut.)}
\end{aligned}$$

Et voilà ! □

Chaque ligne est claire. Mais trouver la chaîne n'est pas si évidente.

Remarque. On a vu beaucoup de ()'s dans cette preuve. Parce que $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$, écrire

$$p \vee q \vee r$$

n'est pas ambigu. On supprime des ()'s, qui sont dans ce cas superflus.

Ainsi pour

$$p \wedge q \wedge r$$

On pose la convention que "$\neg$" a une *plus haute priorité* que $\vee$ ou $\wedge$ ou $\to$ ou ...

Donc $\neg p \vee q$ veut dire $(\neg p) \vee q$ (et pas $\neg(p \vee q)$, ce qui est vraiment différent).

Et $\neg p \to q$ veut dire $(\neg p) \to q$.

Mais c'est ambigu d'écrire "$p \wedge q \vee r$" et "$p \wedge q \to r$"; on n'a pas le droit d'écrire ça (il faut ajouter des ()'s pour clarifier ce qu'on veut vraiment). Nous ne posons pas de priorités entres les autres opérations. **Vous aussi êtes obligés d'évitez des ambiguïtés**, en utilisant les ()'s et [ ],s. Et à chaque symbol "(" il faut correspondre un symbol ")".

4.9. **Règles d'inference de base.** Voici quelques règles d'inférence[6] utilisées tout le temps aussi.

Théorème 4.2. *Les suivants sont des équivalences logiques.*

$$
\begin{aligned}
p &\Rightarrow (p \vee q) \text{ (Addition)} \\
p \wedge q &\Rightarrow p \text{ (Simplification)} \\
[p \wedge (p \to q)] &\Rightarrow p \text{ (Modus ponens)} \\
[\neg q \wedge (p \to q)] &\Rightarrow q \wedge p \text{ (Modus tollens)} \\
[(p \to q) \wedge (q \to r)] &\Rightarrow (p \to r) \text{ (Syllogisme par hypothèse)} \\
[(p \vee q) \wedge \neg q] &\Rightarrow p \text{ (Syllogisme disjonctif)}
\end{aligned}
$$

Proof. Aussi facile à montrer avec un tableau de vérité. Par exemple *Modus ponens*:

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$(p \wedge (p \to q)) \to p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

La dernière colonne contient seulement des V, donc correspond à une tautologie. □

Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ alors aussi $P \Rightarrow R$. (Mais $P \Rightarrow Q$ n'implique pas en général que $Q \Rightarrow P$).

Et $P \Leftrightarrow Q$ si et seulement si $P \Rightarrow Q$ et $Q \to P$.

Donc on peut composer des règles d'inférences, et obtenir d'autre règles d'inférence.

Par exemple.

Lemme 4.1. *Une autre règle d'inférence :*

$$(q \wedge (\neg p \to \neg q)) \Rightarrow p.$$

Proof. On combine $(\neg p \to \neg q) \Leftrightarrow (q \to p)$ avec modus ponens

$$(q \wedge (\neg p \to \neg q)) \Leftrightarrow (q \wedge (q \to p)) \Rightarrow p.$$

□

Cette règle d'inférence est utilisée dans une preuve par l'absurde, comme nous verrons plus tard.

[6] Voir [R, §3.1]

4.10. **Fonctions propositionnelles et quantifications.** Il y a des énoncés comme ”$n > 2$” qui sont presque des propositions logiques mais qui contiennent des indéterminés (comme "n" dans l'exemple). Du moment qu'on précise ces indéterminés elles deviennent des propositions logiques. C'est donc vraiment une famille de propositions logiques.

Par exemple $p(n) :=$ ”$n > 2$”. C'est une famille de propositions logiques, dépendant de la variable n qui varie dans l'ensemble $\mathbb{N}$. Ici $p(n)$ est fausse si $n = 0, 1$ ou 2 et vraie sinon (pour $n \in \mathbb{N}$).

Soit U un ensemble. Une fonction

$$p : U \to \{\text{propositions logiques}\}$$

qui associe à chaque $u \in U$ la proposition logique

$$p(u)$$

s'appelle *fonction propositionnelle* avec U comme univers du discours de la variable u.

Exemple: Soit U l'ensemble des hommes qui habitent Montréal et $p(X) :=$ " X peut patiner".

Soit $P(u)$ une fonction propositionnelle avec U comme univers de discours de la variable u.

On définit deux nouvelles propositions logiques vraies, les deux *quantifications*.

On écrit

$$\forall u\ P(u)\ (\text{ou } \forall u : P(u))$$

pour la proposition logique:

"$P(u)$ est vraie pour tous les valeurs de u sur son univers de discours", ou,

"pour chaque valeur u dans l'univers de discours la proposition $P(u)$ est vraie".

(On dit parfois: la quantification universelle.)

Dans l'exemple:

$\forall X\ P(X)$ est une traduction logique de "Tous les hommes qui habitent Montréal peuvent patiner."

Et on écrit

$$\exists u\ P(u)\ (\text{ou } \exists u : P(u))$$

pour la proposition logique:

"$P(u)$ est vraie pour au moins une des valeurs de u choisi dans son univers de discours", ou

"il existe au une valeur u dans l'univers de discours telle que la proposition $P(u)$ est vraie".

(On dit: parfois: la quantification existentielle.)

Dans l'exemple: $\exists X\ P(X)$ est une traduction logique de "Au moins un homme qui habite Montréal peut patiner."

Exemple: Si $p(n) :=$ ”$n > 2$” avec univers du discours $\mathbb{N}$. alors ”$\forall n\ n > 2$” est fausse (car au moins $p(1) =$ ”$1 > 2$” n'est pas vraie); et ”$\exists n\ n > 2$” est vraie (car au moins $p(3) =$ ”$3 > 2$” est vraie).

On remarque:

$\forall u\ p(u)$ est vraie si $p(u)$ est vraie pour chaque u;

$\forall u\ p(u)$ est fausse s'il existe au moins un u tel que $p(u)$ est fausse. Traduction

$$\neg(\forall u\ p(u)) \Leftrightarrow \exists u\ (\neg p(u))$$

$\exists u\ p(u)$ est vraie s'il existe un u tel que $p(u)$ est vraie; $\exists u\ p(u)$ est fausse si pour chaque u on a que $p(u)$ est fausse. Traduction:

$$\neg(\exists u\ p(u)) \Leftrightarrow \forall u\ (\neg p(u))$$

On formule ses résultats en forme d'une proposition.

Proposition 4.3. *Soit $P(u)$ une fonction propositionnelle avec U comme univers de discours de la variable u. Alors*

$$\neg(\forall u\ p(u)) \Leftrightarrow \exists u\ (\neg p(u))$$

et

$$\neg(\exists u\ p(u)) \Leftrightarrow \forall u\ (\neg p(u)).$$

4.11. **Utilisation dans les arguments et preuves mathématiques.** On utilise les règles d'inférence dans les arguments et dans les preuves. Typiquement (ici p et q sont certains propositions logiques explicites) :

Un petit argument comme le suivant est logiquement correct (par modus ponens) : *"On a p et aussi que p implique q, donc on a aussi q"*, ce qui est une version courte pour: *"La proposition logique p est vraie et l'implication $p \to q$ est vraie, alors automatiquement la proposition logique q est aussi vraie"*.

Remarque. Si on dit en mathématique "on montre p", ça veut dire "on donne des arguments pour montrer que la proposition logique p est vraie". C'est plus court.

Ou un argument comme: *"p implique q et q implique r, alors nécessairement p implique r aussi"*, ce qui est la version courte de *"Les implications $p \to q$ et $q \to r$ sont vraies alors nécessairement l'implication $p \to r$ est aussi vraie"* (par Syllogisme par hypothèse).

Ou trivialement : *"On sait p et q, donc en particulier p"*, ce qui courte pour : *"On sait que les propositions logiques p et q sont vraie, donc p est vraie"* (par Simplification).

Ou: *"On sait p ou q, mais q est faux; donc nécessairement p est vraie,"* est courte pour: *On sait $p \vee q$ est vraie, mais que la proposition q est fausse; alors la proposition logique p est vraie.*

Tout ça devrait paraître naturel.

Exercice 4.1. (i) Mais comparer maintenant les deux "arguments" semblables suivants.

"On sait que p implique q, mais p est faux; alors q est aussi faux" (courte pour : *On sait que l'implication $p \to q$ est vraie et que la proposition p est fausse; alors la proposition q est fausse*)

et

"On sait que p implique q, mais q est faux; alors p est aussi faux" (courte pour : *On sait que l'implication $p \to q$ est vraie et que la proposition q est fausse; alors la proposition p est fausse*).

La différence semble être petite, mais le premier argument est logiquement **invalide** (car basée sur une contre-vérité) et le deuxième argument est logiquement valide.

Trouver pourquoi.

(ii) Est-ce que l'argument suivant est valide:

"On a q et que q est impliqué par p; alors p.

La (contre-) vérité sous-entendue ?

(iii) Est-ce que vous acceptez : *On sait que q est vraie, alors l'implication $p \to q$ est vraie* ?

(iv) Et : *On sait que p est faux, alors l'implication $p \to q$ est vraie* ?

(v) Et : *On sait que l'implication $p \to q$ est faux, alors q est vraie* ?

4.12. **Preuve par contradiction.** Soit p une proposition logique explicite, qu'on veut montrer vraie. Une méthode est de supposer le contraire est vraie, alors que p est faux. Puis d'utiliser cet hypothèse, et des théorèmes déjà montrés pour obtenir une contradiction ou une absurdité. On conclut que p est vraie.

Encore une fois, comme un modèle.

Proposition 4.4. *p*

Structure d'une preuve par l'absurde typique. Montrons p par une preuve par l'absurde. Supposons par contre que p soit fausse, c.-à-d que $\neg p$ vraie.

Puis en utilisant cet hypothèse $\neg p$ (et les théorèmes déjà montrés) on montre qu'une certain proposition logique auxiliaire, disons q, est aussi fausse (donc $\neg q$ est vrai). Puis on remarque que c'était déjà connu (ou on avait déjà montré sans utiliser l'hypothèse que q est faux !) que q est vraie. C'est absurde (ou une contradiction).

On conclut que p est vraie. □

Remarque. C'est quoi le principe logique utilisé? Dans la preuve on montre en fait que l'implication $(\neg p) \to (\neg q)$ est vraie et aussi que q est vraie. Par l'inférence $q \wedge (\neg p \to \neg q) \Rightarrow p$ (lemme 4.1) on conclut p est vraie. Ce qu'on voulait montrer en effet. Par exemple, souvent q est une proposition logique qui est évidemment vrai comme $q =$ "$3 > 2$".

4.13. **Preuves typique d'une implication.** En mathématiques il faut souvent montrer des implications $p \to q$, où p et q sont deux propositions logiques. Il y a trois versions. Voir par exemple prop.3.2[7].

Soient p et q deux propositions logiques explicites en mathématiques, et on veut montrer que p implique q.

Théorème 4.3. *$p \to q$*

Structure d'une preuve directe typique. Si p est fausse, l'implication est automatiquement vraie, donc il n'y a rien à montrer dans ce cas. (Cette phrase est souvent omise).

Supposons p est vraie. Puis (avec cette hypothèse et avec de l'aide des théorèmes déjà montrés), on montre que q sera aussi vraie.

On aura montré que $p \to q$ est vraie. □

Cette version est claire, j'espère. Une autre version:

Structure d'une preuve indirecte typique. Il suffit de montrer sa contraposée $(\neg q) \to (\neg p)$.

Si $\neg q$ est faux (ou q est vraie), l'implication est automatiquement vraie et il n'y a rien à montrer. (Cette phrase est souvent omise).

Supposons $\neg q$ est vraie, c.-à-d, q est fausse. Puis (avec cette hypothèse et avec de l'aide des théorèmes déjà montrés), on montre que p sera aussi fausse, ou que $\neg p$ est vraie.

[7] Voir [R, p. 164]

On aura montré que $P \to Q$ est vraie. $\square$

Remarque. Cette version est basée sur l'équivalence logique: $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$. Chacun constitue la structure d'une preuve valide. Avec une preuve directe on peut travailler avec l'hypothèse que P est vraie pour montrer qu'alors Q est aussi vraie. Mais de temps en temps il est plus facile de commencer avec l'hypothèse que Q est faux pour montrer qu'alors P est aussi faux.

Structure d'une preuve par l'absurde typique. Montrons $p \to q$ par une preuve par l'absurde. Supposons par contre que $p \to q$ est fausse, c.-à-d que p est vraie mais q est fausse.

Puis en utilisant ces deux hypothèses (que p est vraie et q fausse) (et les théorèmes déjà montrés) on montre qu'un certain proposition logique auxiliaire, disons r, est fausse (donc que $\neg r$ est vrai). Puis on remarque que c'était déjà connu (ou on montre directement sans utiliser l'hypothèse $p \wedge \neg q$) que r est vraie. Ce qui est absurde (ou une contradiction).

On conclut que $p \to q$ est vraie. $\square$

Remarque. C'est une variation sur une preuve par l'absurde, ou l'énoncé à montrer est $P := p \to q$ (à la place de p). On a $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ et le contraire est $\neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \neg p$ (par De Morgan et double négation.

Différence entre la preuve directe, la preuve indirecte et la preuve par l'absurde pour montrer une implication $p \to q$? Pour la preuve directe: on peut utiliser l'hypothèse p pour montrer la conclusion q. Pour la preuve indirecte: on peut utiliser l'hypothèse $\neg q$ pour montrer la conclusion $\neg p$. Et pour une preuve par l'absurde: on peut utiliser deux hypothèses pour commencer le raisonnement (p vraie et q faux) pour dériver une absurdité (ou une contradiction). Ça dépend des propositions explicites p et q et de vos connaissance d'autres théorèmes quel façon est préférable!

Il y a aussi des fausse preuves, basées sur une contre-vérité. Considérons la "preuve":

Structure d'une fausse preuve typique. Il suffit de montrer $(\neg P) \to (\neg Q)$ est vraie.

Si $\neg P$ est faux (ou P est vraie), l'implication est automatiquement vraie. Donc il n'y a rien à faire.

Supposons $\neg P$ est vraie, ou P est fausse. Puis (avec cette hypothèse et avec de l'aide des théorèmes déjà montrés), on montre que Q sera aussi fausse, $\neg Q$ est vraie

On aura montré que $P \to Q$ est vraie. $\square$

Remarque. Pourquoi c'est une **fausse** preuve (donc pas une preuve du tout), car c'est basée sur une *contre-vérité*: les formules logiques $p \to q$ et $(\neg p) \to (\neq q)$ ne sont pas logiquement équivalentes.

Une telle FAUSSE preuve est inacceptable. (En fait, ce qu'on montrerait vraiment en fait est la *réciproque* $q \to p$).

4.14. **Si et seulement si.** Aussi utilisé souvent est l'équivalence logique entre "$(p \leftrightarrow q)$ et "$(p \to q) \wedge (q \to p)$".

Proof. Encore une fois montrée par un tableau de vérité :

p	q	$p \leftrightarrow q$	$q \to p$	$q \to p$	$((p \to q) \wedge (q \to p))$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

On conclut la preuve, car les colonnes correspondantes sont identiques. $\square$

En mots: $P \leftrightarrow Q$ est vraie si et seulement si $P \to Q$ et sa réciproque $Q \to P$ sont vraies.

On conclut que pour montrer que $p \leftrightarrow q$ (est vraie) il suffit de montrer que $p \to q$ (est vraie) et puis de montrer qu'aussi $q \to p$ (est vraie) (ou alternativement que $(\neg p) \to (\neq q)$(est vraie)).

Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, C.P. 6128, succursale Centre-ville, Montréal (Québec), Canada H3C 3J7

E-mail address: broera@DMS.UMontreal.CA