Rappel :
La contraposée de $p \to q$ est par définition la proposition $(\neg q) \to (\neg p)$.
(faute d'écriture du manuel p. 7 : ne laissez-vous pas distraire).
La reciproque de $p \to q$ est par définition la proposition $q \to p$.

Montré :
la proposition $p \to q$ et sa contraposée sont logiquement équivalentes :

$$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p).$$

Et
$p \leftrightarrow q$ est vraie si et seulement $p \to q$ et sa reciproque sont vraies :

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$$

Qu'est-ce que vous en pensez :

$q \to p$ est une sorte d'opposé de $p \to q$ (sa réciproque)
et
l'opposé de $(q \to p)$ est $\neg(q \to p)$
et donc
$p \to q$ est la même chose que $\neg(q \to p)$.
Ou, dans la langue de la semaine passée, ça semble que

$$(p \to q) \Leftrightarrow \neg(q \to p).$$

Raisonable ? Logique ?

Vous avez des doutes ?

Vérifions :

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\neg(q \to p)$	$(q \to p) \leftrightarrow (\neg(q \to p))$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F

NON, c'est une contre-vérité !

Il faut aiguiser le sens critique.

En effet : $q \to p$ n'est pas l'opposé de $p \to q$.

Qu'est-ce que vous en pensez :

E : "...... on a déjà montré que p implique q.... alors q est vraie et ......"

P : "Non, on n'a pas le droit"

E : "Mais, en supposant que p est vraie j'ai montré que q est vraie, n'est-ce pas ? Alors q est vraie, non ?"

P : "Non !"

On a $p \to q$ est vraie si p est fausse. Donc ça montre :

$(''0 = 1'') \to$ "Dieu existe".

Il suit que "Dieu existe" ?!
Non.
Il suit que "Dieu n'existe pas" ?!
Non.

$p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$

Mais
" .....on a montré p et que ça implique q, donc q est vraie ...."
ou
"...... on a déjà montré que p implique q, et p est vraie.... alors q est vrai et ......"
est une raisonnement logique, basée sur la tautologie :

$$(p \wedge (p \to q)) \to q$$

(c.-à-d, toujours vraie, n'importe p et q).

$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ est une proposition logique toujours vraie, n'importe les propositions p et q.

Preuve par tableau :

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

$(p \wedge (p \to q)) \to q$ est une proposition logique toujours vraie, n'importe les propositions p et q.

Une preuve directe :
Supposons l'hypothèse est vraie ; c.-à-d., p et $p \to q$ sont supposés vraies.
$p \to q$ vraie veut dire par définition : soit (i) p est faux, soit (ii) p et q sont vraies. Un des deux cas.
Mais on a supposé p est vraie, donc c'est cas (ii). Ce qui implique que q est vraie aussi.
Donc si l'hypothèse est vraie, la conclusion est vraie aussi. Cet implication est vraie. □

$(p \wedge (p \to q)) \to q$ est une proposition logique toujours vraie, n'importe les propositions p et q.

En particulier, si p est remplacé par une autre proposition logique, et q aussi par une autre proposition logique alors l'implication reste vraie.

Exemple : remplace "p" partout dans la formule par $q \vee (r \to s)$ et "q" partout par $p \to s$ on obtient la proposition logique automatiquement VRAIE :

$$([q \vee (r \to s)] \wedge ([q \vee (r \to s)] \to [p \to s])) \to [p \to s]$$

(attention aux ()'s et [ ]'s).

( )

Règles d'inférence

Si P et Q sont deux formules logiques telles que $P \rightarrow Q$ est une tautologie, on dit que c'est une règle d'inférence et on écrit

$$P \Rightarrow Q$$

alors si P est vraie alors AUTOMATIQUEMENT aussi Q est vraie. Mais si P est fausse, nous ne pouvons rien conclure a propos Q.

Par exemple, proposition logique :

$$(p \wedge (p \rightarrow q)) \Rightarrow q$$

une règle d'inférence appelée classiquement modus ponens.

(cct)

Considérons P :="S'il fait beau je vais nager cet après-midi. Il fait beau. Donc je vais nager cet après-midi."
Vraie ou Fausse ?

Analyse.
Posons :
p :="il fait beau"
q :=" je vais nager cet après-midi".
Donc :
$p \to q$ = "S'il fait beau je vais nager cet après-midi."
$P = [(p \to q) \wedge p] \to q$.

Est-ce que "il fait beau" ? est-ce que " je vais nager cet après-midi" ? est ce que "" S'il fait beau je vais nager cet après-midi" ? Qui sait.

N'importe, au moins il est certain que P est vraie par modus ponens ! !

Règles d'inférence déjà utilisés correctement par vous tous les jours :

$$p \Rightarrow (p \vee q)$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow p$$

$$(p \vee q) \wedge (\neg p) \Rightarrow q.$$

Un peu d'attention, mais bien "connues" aussi :

$$(p \wedge (p \to q)) \Rightarrow q \text{ (modus ponens)}$$

et

$$(\neg q \wedge (p \to q) \Rightarrow \neg p \text{ (modus tollens)}$$

et

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r) \text{ (syllogisme par hypothèse)}$$

$$(\neg q) \wedge (p \to q) \Rightarrow \neg p$$

Pour montrer modus tollens, commençons avec modus ponens
$(p \wedge (p \to q)) \Rightarrow q$
Faisons les substitutions p par $\neg q$ et q par $\neg p$ (on a le droit !) :
$(\neg q \wedge (\neg q \to \neg p)) \Rightarrow \neg p$.
Puis utilisons l'équivalence logique
$(\neg q \to \neg p) \Leftrightarrow (p \to q)$
nous obtenons modus tollens :
$(\neg q \wedge (p \to q) \Rightarrow \neg p$.

$\Rightarrow$

$$q \Rightarrow p \wedge (p \to q)$$

$$[(p \to q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$$

"S'il fait beau je vais nager cet après-midi. Je ne vais pas nager cet après-midi. Donc il ne fait pas beau."
Cette proposition composée (ou cet argument) est VRAIE par modus tollens.
Mais je ne sais pas si "S'il fait beau je vais nager cet après-midi" est vraie ou fausse ! !

"S'il fait beau je vais nager cet après-midi. Si je vais nager cet après-midi, je dormirai bien ce soir. Donc s'il fait beau je dormirai bien se soir."
Cette proposition composée (ou cet argument) est vraie.

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$$

On peut combiner des règles d'inférence et les équivalences logiques :

Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ alors aussi $P \Rightarrow R$.

Et

$P \Leftrightarrow Q$ si et seulement si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Exemple :

$$[(p \vee q) \rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)]$$

implique la règle d'inférence

$$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$$

Preuve algébrique de l'équivalence logique

$$[(p \vee q) \rightarrow r] \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r).$$

$$\begin{aligned}
[(p \vee q) \rightarrow r] &\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r \text{ (Car } p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r \text{ (Par De Morgan)} \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \text{ (Par distr.)} \\
&\Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \text{ (Car } p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q)
\end{aligned}$$

Une formule qui n'est pas une tautologie est appelée : contrevérité.

Par exemple :

$$P(p,q) := [(p \to q) \land q] \to p$$

n'est PAS une tautologie, donc une contrevérité, car si p est fausse et q vraie, alors P est fausse.
Si on sait seulement que q est vraie, on ne sait pas encore si P est vraie ou fausse ! Considérons :

"... ainsi on a montré que p implique q. Parce que on sait aussi que q est vraie, on conclut que p est aussi vraie. "

cet argument n'est pas logiquement correct.

$[(p \to q) \land q] \to p$ est une contrevérité, donc

"C'est certain que si quelqu'un fait beaucoup des haltères il sera fort. Vous êtes fort. Donc vous devez avoir faites beaucoup des haltères. Non ?"

n'est pas un argument acceptable.

Autre contrevérité "utilisée" souvent :

$$P := \boxed{[(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \rightarrow \neg q}$$

"C'est certain que si quelqu'un fait beaucoup des haltères il sera fort. Vous ne faites pas beaucoup des haltères. Donc vous ne serez pas fort !"

n'est pas acceptable comme argument.

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$$

Considérons l'argument :

P :=" Si 32085 est divisible par 13, alors 32085^2 est divisible par $13^2 = 169$. Le nombre 32085 est divisible par 13. Par conséquent, 32085^2 est divisible par 169".

Analyse : posons p ="32085 est divisible par 13", q :="32085^2 est divisible par $13^2 = 169$". Alors $P = [(p \to q) \wedge p] \to q$. Donc P est vraie par modus ponens !

Cet argument P est valide, donc 32085^2 est divisible par 169 ? !

Calculatrice : $\frac{32085^2}{169} = 6091403{,}69822....$
Hè ? ! On a fait une erreur ! En effet.
"Cet argument est valide, donc 32085^2 est divisible par 169"
est basée sur une contre-vérité

$$([(p \to q) \wedge p] \to q) \to q$$

(si c'est une tautologie et son hypothèse P est vraie (ce qui est le cas), alors par modus ponens, en effet q serait vraie aussi. Mais.....)

Partie d'un argument :

"... Supposons p. Puis on donne des arguments qui montre finalement que p est vraie. Donc p est vraie."

On suppose p est vraie pour montrer que p est vraie. Hmmm.
Raisonnement circulaire.

Preuve par l'absurde ou Reductio ad absurdum

Une telle preuve est basée sur une autre règle d'inférence :

$$\boxed{[(\neg p \to q) \wedge \neg q] \Rightarrow p.}$$

Pour montrer cette règle. Commençons avec modus ponens $[(\neg q \to p) \wedge \neg q] \Rightarrow p$, et utilisons $(\neg q \to p) \Leftrightarrow (\neg p \to q)$.

$(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$

Supposons on veut montrer qu'une proposition p est vraie.
En supposant p est fausse, on montre une proposition auxiliaire disons q.
Alors que $\neg p \rightarrow q$ est vraie.
Mais on sait que son opposé $\neg q$ est vraie.
Donc l'hypothèse de la règle d'inférence est vraie :

$$[(\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow p.$$

C'est une règle d'inférence, donc aussi la conclusion p est vraie.

Soient A et B deux ensembles et $F : A \to B$ et $G : B \to A$ deux fonctions telles que $G \circ F = 1_A$. $: A \to A$

Considérons la proposition logique

$p :=$"F est injective".

Preuve par l'absurde : Supposons p est faux, c.-à-d., F n'est pas injective. Par définition d'injectivité, ils existent deux éléments a_1, a_2 de A telles que $F(a_1) = F(a_2)$, mais $a_1 \neq a_2$. Parce que $G \circ F = 1_A$ on a

$$a_1 = 1_A(a_1) = G(F(a_1)) = G(F(a_2)) = 1_A(a_2) = a_2.$$

Donc sous l'hypothèse que p est fausse, on a montré la proposition $q :=$"ils existent a_1, a_2 dans A tels que $a_1 = a_2$ et $a_1 \neq a_2$" est vraie. Ce qui est absurde, car son opposé, $\neg q$, est vraie.

On conclut p est vraie. $\square$

$\angle$ $1_A(a) = a$

Soit P une proposition en mathématiques.

Théorème

P

Preuve par l'absurde typique.

Supposons P est fausse. Puis (avec cette hypothèse et avec de l'aide de théorèmes déjà montrés) on montre une proposition auxiliaire, disons q. Puis on montre directement (sans utiliser l'hypothèse que P est fausse) que q est fausse. Ce qui serait absurde.
On conclut : P est vraie. $\square$

Un cas spécial. Soient P et Q deux propositions en mathématiques.

Théorème

$P \rightarrow Q$

Preuve par l'absurde typique.

Supposons $P \rightarrow Q$ est fausse, c.-à-d., supposons P vraie et Q fausse. Puis (avec ces deux hypothèses et avec de l'aide de théorèmes déjà montrés) on montre une proposition auxiliaire, disons r. Puis on montre directement (sans utiliser l'hypothèse que $P \rightarrow Q$ est fausse) que r est fausse. Ce qui serait absurde.

On conclut : $P \rightarrow Q$ est vraie. □

Si on veut montrer $P \to Q$ il y a trois types de preuves typiques, trois stratégies.

Preuve directe. Avec l'hypothèse P on montre (avec de l'aide de théorèmes déjà établis) Q.

Preuve indirecte. Avec l'hypothèse $\neg Q$ on montre (avec de l'aide de théorèmes déjà établis) $\neg P$.

Preuve par l'absurde. Avec les hypothèse P et $\neg Q$ on montre (avec de l'aide de théorèmes déjà établis) une absurdité auxiliaire.

fin

Preuve vides.

Supposons on doit montrer $P \to Q$.
Si on sait que P est faux ou si Q est vraie : il n'y a plus rien à faire !
L'implication est vraie.

Si on doit montrer $(p \vee q) \to r$, il suffit de montrer cas par cas $p \to r$ et $q \to r$.

Par exemple. Soit n un nombre naturel.

$P =$"Si n n'est pas divisible par 3 alors $n^2 - 1$ est divisible par 3"

$p =$"il existe un nombre naturel m tel que $n = 3m + 1$"

$q =$"il existe un nombre naturel m tel que $n = 3m + 2$"

r="$n^2 - 1$ est divisible par 3"

$P = (p \vee q) \to r$

Preuve de P est cas-par-cas :

Preuve de $p \to r$: On a que

$n^2 - 1 = (3m + 1)^2 - 1 = 9m^2 + 6m = 3(3m^2 + 2m)$ est un 3-multiple.

Preuve de $q \to r$: On a que

$n^2 - 1 = (3m + 2)^2 - 1 = 9m^2 + 12m + 3 = 3(3m^2 + 4m + 1)$ est un 3-multiple.

Soit $p(u)$ une fonction propositionnelle avec univers de discours U. Et q une proposition logique.
Distr :

$$(p_1 \vee q) \wedge (p_2 \vee q) \Leftrightarrow (p_1 \wedge p_2) \vee q$$

$$\forall u[p(u) \vee q] \Leftrightarrow [\forall u \ p(u)] \vee q.$$

$$\forall u \ [p(u) \wedge q] \Leftrightarrow [\forall u \ p(u)] \wedge q$$

$$\exists u[p(u) \vee q] \Leftrightarrow [\exists u \ p(u)] \vee q$$

$$(\exists u \ p(u)) \rightarrow q \Leftrightarrow \forall u[p(u) \rightarrow q].$$