Rappel :

Soit E un ensemble de n éléments.

• Combien de façons de choisir N fois un élément de E (sans remise), si l'ordre est important ?
Ce sont les N-permutations : $P(n, N)$. $= n(n-1)\cdots(n-N+1) = \dfrac{n!}{(n-N)!}$

• Combien de façons de choisir N fois un élément de E (sans remise), si l'ordre n'importe pas ?
Ce sont les N-combinaisons : $C(n, N)$. $= \dfrac{n!}{(n-N)!\,N!}$

• Combien de façons de choisir N fois un élément de E (avec remise), et $|E| = n$, si l'ordre est important ?

En bijection avec les suites $(x_1, \ldots, x_N) \in E^N$, donc la réponse est n^N

• Combien de façons de choisir N fois un élément de E (avec remise), si l'ordre n'importe pas ?

Ce sont les N-combinaisons avec remise : la réponse $C(N + n - 1, N)$.

Nous allons montrer ça aujuourd'hui, mais plus tard ! ! Il y a une bijection cachée.

Choisir dans autres collections

On choisit dans ces problèmes avant un élément dans un ensemble : une collection où tous les objets sont distinguable !

Le problème sera différent si certains des objets dans la collection sont considérés comme indistinguable !

Exemple.

Supposons nous avons un vase qui contient 10 boules, dont 3 noirs, 3 blanches et 4 rouges. On considère les boules de la même couleur comme indistinguable.

Combien de façons différents d'en choisir cinq (l'ordre des choix n'importe pas, et sans remise) ?

Solution :

Si toutes les boules étaient distinguables la réponse serait $C(10, 5) = 252$, mais ce n'est pas le cas. On ne choisit pas dans un ensemble cette fois.

Dans la vraie vie les 10 boules sont toujours distinguable, et forme donc un ensemble. Mais ici on ne veut pas distinguer les boules de la même couleur.

Nous pouvons énumérer tous les cas différents, et puis compter :

nnnbb, *nnnbr*, *nnnrr*,

nnbbb, *nnbbr*, *nnbrr*, *nnrrr*

nbbbr, *nbbrr*, *nbrrr*, *nrrrr*

bbbrr, *bbrrr*, *brrrr*

~~bbbbb~~

Total : seulement 14.

Remarquez : *nnnbb* $=$ *nbnbn* ($=$ 3 noirs et deux blanc)
(ou les choix consécutifs *nnnbb* et *nbnbn* sont équivalents).

Multi-ensembles

On devrait modéliser cette collection de boules comme un multi-ensemble, c.-à-d,

un ensemble où chaque élement a une multiplicité donnée. On permet la multiplicité 0.

Definition

Un multi-ensemble est un ensemble E avec une fonction $E \to \mathbb{N}$, dite la fonction multiplicité.

Notre vase correspond au multi-ensemble :

$$\begin{pmatrix} n & b & r \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Autre notation :

$$\{n^3, b^3, r^4\}$$

les exposants sont les multiplicités.
Ou encore :

$$\{n, n, n, b, b, b, r, r, r, r\}$$

est utilisée : mais c'est dangereux : ce n'est pas un ensemble !

Definition

Un sous-multi-ensemble de E avec fonction multiplicité f, est le même E avec fonction multiplicité g, telle que $g(x) \leq f(x)$ pour chaque $x \in E$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} n & b & r \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} n & b & r \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

La taille, ou la cardinalité, est la somme de toutes les multiplicités.

La taille de $\begin{pmatrix} n & b & r \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est

$$\left| \begin{pmatrix} n & b & r \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right| = 2 + 2 + 0 = 4.$$

Posons n pour "boule noir", b pour "boule blanche" et r pour "boule rouge" et

$$E = \{n, b, r\}$$

l'ensemble des trois types de boules. La fonction multiplicité :

$$\begin{pmatrix} n & b & r \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Les sous-multi-ensembles de taille 5 de $\{n^3, b^3, r^4\}$ sont

$$\{n^3, b^2, r^0\}, \{n^3, b^1, r^1\}, \{n^3, b^0, r^2\}$$

$$\{n^2, b^3, r^0\}, \{n^2, b^2, r^1\}, \{n^2, b^1, r^2\}, \{n^2, b^0, r^3\}$$

$$\{n^1, b^3, r^1\}, \{n^1, b^2, r^2\}, \{n^1, b^1, r^3\}, \{n^1, b^0, r^4\}$$

$$\{n^0, b^3, r^2\}, \{n^0, b^2, r^3\}, \{n^0, b^1, r^4\}$$

Les sous-multi-ensembles de $\begin{pmatrix} n & b & r \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ de taille 5 est donc en bijection avec les choix de 5 boules (sans remise, ordre n'importe pas) dans le vase contenant 3 boules noirs, trois blancs et 4 rouges.

Les deux problèmes ont la même réponse.

Exemple :

Combien y a-t-il de façons de choisir (sans remise) quatre fruits dans un bol contenant des pommes, des oranges et des bananes, si l'ordre dans lequel ces fruits sont choisis n'importe pas, que seul le type de fruit et non pas le fruit en tant que tel importe et qu'il y a au moins quatre fruits de chaque catégorie dans le bol ?

Analyse préliminaire :

Soit $E := \{$ pomme, orange, banane $\}$.

Une 4-combinaison avec remise de E est "3 bananes et une orange" ou "une banane, une orange et deux pommes". C'est comme un choix de quatre fruits ! Et vice versa : un choix de quatre fruits nous donne une 4-combinaison avec remise de E.

Les 4-combinaisons-avec-remise de E sont en bijection avec les choix de quatre fruits.

Donc la réponse est $C(N+n-1, N) = C(N+n-1, n-1)$, où $N = 4$, $n = 3$, c.-à-d,

$$C(4+2-1, 4) = C(4+2-1, 3-1) = 15$$

Autre bijection. Chaque choix donne un multi-ensemble sur l'ensemble $E := \{$ pomme, orange, banane $\}$ de taille 4. Par exemple, choisir 2 pommes et 2 bananes (et 0 oranges) correspond au

$$\begin{pmatrix} po. & ba. & or. \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Et vice versa. Donc le problème de compter le nombre de multi-ensembles sur E de taille 4 a aussi la même réponse.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_i \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad (x_1, x_2 x_3) = (2,2,0)$$

$$= (0,3,1)$$

$$= (1\ 1\ 2$$

Heureusement dans ce problème il y a beaucoup de fruits de chaque type dans le bol.

Si on a seulement 3 bananes dans le bol, pas tous les 4-combinaisons avec remise de E correspondent à un choix de quatre fruits : la 4-combinaison-avec-remise "4 bananes" ne correspondrait plus a un choix de 4 fruits (il manque de bananes).

N-Combinaisons-avec-remise

Soit E un ensemble avec n éléments.

•Le nombre des N-combinaisons-avec-remise de E
(c.-à-d., les façons de choisir N fois un élément de E avec remise, si l'ordre n'importe pas)

est égal

• au nombre de multi-ensembles de taille N basés sur l'ensemble E
(c.-à-d, le nombre des fonctions $f : E \to \mathbb{N}$ telles que $\sum_{a \in E} f(a) = N$).

Soit E un ensemble avec n éléments.

- Le nombre des multi-ensembles de taille N basés sur l'ensemble E (c.-à-d, le nombre des fonctions $f : E \to \mathbb{N}$ telles que $\sum_{a \in E} f(a) = N$)

est égal

- au nombre de façons de résoudre l'équation

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n = N$$

avec $X_i \in \mathbb{N}$, pour chaque $1 \leq i \leq n$.

Preuve. Fixons $E = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, une énumération des éléments de E. Ces fonctions sont

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ r_1 & r_2 & r_3 & \ldots & r_n \end{pmatrix}$$

tel que $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = N$ et chaque $r_i \in \mathbb{N}$.

On obtient une solution de $X_1 + X_2 + \ldots + X_n = N$ avec des nombres naturels, en prenant $X_i = r_i$.

Et vice versa, une ~~ne~~ solution induit une telle fonction.

Ces fonctions sont donc en bijection avec les solutions de $X_1 + X_2 + \ldots + X_n = N$ par des nombres naturels. $\square$

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $n \geq 0$.

- Le nombre de façons de résoudre l'équation

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n = N,$$

avec $X_i \in \mathbb{N}$, pour chaque $1 \leq i \leq n$,

est égal

- au nombre de sous-ensembles de taille $n - 1$ de l'ensemble

$$U = \{1, 2, 3, \ldots, N + n - 1\}.$$

Rep $C(N+n-1, n-1)$

Corollaire

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $n \geq 0$.

Le nombre des N-combinaisons-avec-remise de d'un ensmble de n éléments est égal

au nombre de façons de résoudre l'équation

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n = N,$$

avec $X_i \in \mathbb{N}$, pour chaque $1 \leq i \leq n$,

qui est

$$C(N + n - 1, N) = C(N + n - 1, n - 1).$$

Nous allons montrer explicitement que l'ensemble des solutions de l'équation

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n = N,$$

avec $X_i \in \mathbb{N}$, pour chaque $1 \leq i \leq n$, est

en bijection

avec l'ensemble des sous-ensembles de taille $n-1$ d'un ensemble de $N+n-1$ éléments :

$$U = \{1, 2, 3, \ldots, N+n-1\}.$$

Exemple : $N = 5$, $n = 3$. Les triples solutionnaires (X_1, X_2, X_3) sont

$$
\begin{aligned}
\{(0,0,5),\ &(0,1,4), (0,2,3), (0,3,2), (0,4,1), (0,5,0),\\
&(1,0,4), (1,1,3), (1,2,2), (1,3,1), (1,4,1),\\
&(2,0,3), (2,1,2), (2,2,1), (2,3,0),\\
&(3,0,2), (3,1,1), (3,2,0),\\
&(4,0,1), (4,1,0).\\
&(5,0,0)\}
\end{aligned}
$$

En bijection avec les 2-combinaisons de U par la fonction $((a,b,c) \mapsto (a+1, a+b+2))$:

$$
\begin{aligned}
\{\{1,2\},\ &\{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{1,7\},\\
&\{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{2,7\},\\
&\{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{3,7\},\\
&\{4,5\}, \{4,6\}, \{4,7\},\\
&\{5,6\}, \{5,7\},\\
&\{6,7\}\}
\end{aligned}
$$

!

$N+n-1=7$

$n-1=2$

À une solution $(X_1, \cancel{X_2}, \ldots, X_n)$ nous associons le sous-ensemble

$$E = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\} \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, N + n - 1\} \text{ où}$$

$$\begin{aligned} s_1 &:= X_1 + 1 \\ s_2 &:= X_1 + X_2 + 2 \\ s_3 &:= X_1 + X_2 + X_3 + 3 \\ \ldots &:= \ldots \\ s_{n-1} &:= X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1} + (n-1) \end{aligned}$$

$s_{n-1} \le x_1 + - - x_{n-1} + (n-1) + x_n = N+n-1$

En effet

$$1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_{n-1} \le N + (n-1)$$

(rappelons $X_1 + X_2 + \ldots + X_n = N$).

Si $E \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, N + n - 1\}$ est un sous-ensemble de taille $n - 1$, alors on peut écrire $E = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$ avec $1 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_{n-1} \leq N + (n - 1)$. On peut résoudre itérativement les équations

$$\begin{cases} s_1 - 1 &= X_1 \\ s_2 - 2 &= X_1 + X_2 \\ s_3 - 3 &= X_1 + X_2 + X_3 \\ \ldots &= \ldots \\ s_{n-1} - (n-1) &= X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1} \\ N &= X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1} + X_n. \end{cases}$$

Ainsi nous associons à un sous-ensemble de $\{1, 2, 3, \ldots, N + n - 1\}$ de taille $n - 1$ une solution de l'équation

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n = N.$$

En fait, nous avons $1 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_{n-1} \leq N + (n-1)$.
Donc $X_1 = s_1 - 1 \in \mathbb{N}$.

Puis pour $1 \leq i < N$:

$$\begin{aligned} s_{i-1} - (i-1) &= X_1 + X_2 + \ldots + X_{i-1} \\ s_i - i &= X_1 + X_2 + \ldots + X_{i-1} + X_i \end{aligned}$$

montre $X_i = s_i - s_{i-1} - 1 \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} s_{n-1} - (n-1) &= X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1} \\ N &= X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1} + X_n \end{aligned}$$

montre $X_n = N - s_{n-1} + (n-1) \in \mathbb{N}$.

Donc $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une solution où $X_i \in \mathbb{N}$ pour chaque i.

Si on commence par une solution,
puis construit avec cela par notre méthode ce sous-ensemble de $\{1, 2, 3, \ldots, N + n - 1\}$,
et puis construit à partir de ce sous-ensemble une solution,
on retrouve la solution de départ.

Si on commence par un sous-ensemble de taille $n - 1$ de $\{1, 2, 3, \ldots, N + n - 1\}$, puis construit une solution, et puis à partir de cette solution un sous-ensemble, on retrouve le sous-ensemble de départ.

Avec ces préparations nous pouvons finalement donner la preuve du théorème.

Démonstration.

Soit A l'ensemble des solutions de l'équation et B la collection des sous-ensembles de $\{1, 2, 3, \ldots, N+n-1\}$ de taille $n-1$.

Nous avons défini une fonction $f : A \to B$ et une fonction $g : B \to A$.

Et nous avons remarqué que g est l'inverse de f.

Donc $|A| = |B|$.

Nous savons déjà que $|B| = C(N+n-1, n-1)$ et on conclut $\square$

Variation :

Soit E un ensemble tel que $|E| = n > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Combien de fonctions $f : E \to \mathbb{N}$ existent-t-ils telles que $\sum_{a \in E} f(a) = N$?

Réponse : $C(N + n - 1, n - 1)$. $= C(N+n-1, N)$

Pourquoi ?

Si $E = \{a_1, a_2, a_3\}$ est un ensemble avec trois éléments, et $N = 7$ deux telles fonctions sont

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ou

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

En général, fixons $E = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, une énumération des éléments de E. Ces fonctions sont

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ r_1 & r_2 & r_3 & \ldots & r_n \end{pmatrix}$$

tel que $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = N$ et chaque $r_i \in \mathbb{N}$.

On obtient une solution de $X_1 + X_2 + \ldots + X_n = N$ avec des nombres naturels.

Une solution induit une telle fonction.

Ces fonctions sont donc en bijection avec les solutions de $X_1 + X_2 + \ldots + X_n = N$ par des nombres naturels.

Donc le nombre cherché est $C(N + n - 1, n - 1)$.

Variation :

Soit E un ensemble non-vide tel que $|E| = n$ et $N \in \mathbb{N}$. Combien de façons de choisir avec remise N éléments (l'ordre du choix n'importe pas) ? S'appelle une N-combinaison avec remise.

Réponse : $C(N + n - 1, n - 1)$.
Pourquoi ?

Si $E = \{a_1, a_2, a_3\}$ est un ensemble avec trois éléments et $N = 7$, une telle choix est administrée par :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

c.-à-d a_1 est choisi 4 fois, a_2 est choisi 3 fois, et a_3 est choisi 0 fois.

Ici : choisir $a_1, a_1, a_2, a_2, a_2, a_1, a_1$ ou $a_2, a_1, a_1, a_2, a_2, a_1, a_1$ est vu comme le même choix.

Raison :

Chaque fonction $f : E \to \mathbb{N}$ telle que $\sum_{a \in E} f(a) = N$ donne une N-combinaison avec remise : choisir l'élément $a \in E$ exactement $f(a)$ fois.

Par contre, chaque N-combinaison avec remise de E donne une fonction $f : E \to N$, où on définit $f(a)$ comme le nombre de fois que a a été choisi.

Donc la collection des N-combinaisons avec remise de E est en bijection avec la collection des fonctions $f : E \to \mathbb{N}$ telles que $\sum_{a \in E} f(a) = N$.

Donc le nombre de N-combinaisons avec remise de E est égal au nombre des fonctions $f : E \to \mathbb{N}$ telles que $\sum_{a \in E} f(a) = N$, c.-à-d., égal à $C(N + n - 1, n - 1)$. $\square$

Principe d'Inclusion-Exclusion

Nous avons besoin d'un autre principe de comptage.
On ne peut pas utiliser le principe d'addition dans chaque situation de "ou".
Pour compter $|A \cup B|$ il faut compter $|A| + |B|$ et soustraire les cas on a compté double $|A \cap B|$:

$$\boxed{|A \cup B| = |A \cup B| - |A \cap B|.}$$

S'il y a plusieurs ensembles $A_1, \ldots, A_r$ disjoints, alors on a encore

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_r| = |A_1| + \ldots + |A_r|.$$

Mais si les ensembles ne sont pas disjoints : ça devient plus compliqué !

Théorème

Soit U un ensemble, et A_1, $A_2, \ldots$ des sous-ensembles finis.
(i) On a

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

(ii) On a

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= (|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \\ &\quad +|A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.\end{aligned}$$

(iii) Généralement $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s|$ est égal à

$$\sum_{r=1}^{s} (-1)^{r-1} \left(\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le s} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}| \right).$$

Pour obtenir le nombre d'éléments de la réunion de s sous-ensembles on prends

- la somme des tailles de ces ensembles,
- puis on soustrait les tailles de toutes les intersections de deux sous-ensembles,
- puis on ajoute les tailles de toutes les intersections de ~~deux~~ trois sous-ensembles,
- puis on soustrait les tailles de toutes les intersections de ~~trois~~ quatre sous-ensembles,
- puis on ajoute les tailles de toutes les intersections de ~~quatre~~ cinq sous-ensembles,
- puis on soustrait les tailles de toutes les intersections de ~~cinq~~ six sous-ensembles,
- ...

Démonstration.

(i) Chaque élément de $A_1 \cup A_2$ est soit dans A_1 soit dans $A_2 - A_1$, mais jamais dans les deux simultanément. Donc

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2 - A_1|.$$

Chaque élément de A_2 est soit dans $A_2 - A_1$ soit dans $A_1 \cap A_2$, mais jamais dans les deux simultanément. Donc

$$|A_2| = |A_2 - A_1| + |A_1 \cap A_2|.$$

En combinant les deux formules donne (i). $\square$

(suite).

(ii) Par (i) il suit

$$|(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)| = |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

et aussi

$$\begin{aligned}
|(A_1 \cup A_2) \cup A_3| &= |(A_1 \cup A_2)| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3| \\
&= (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|) + \\
&\quad + |A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3| \\
&= (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|) + |A_3| - (|A_1 \cap A_3| + \\
&\quad + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\
&= (|A_1| + |A_2| + |A_3|) \\
&\quad - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\
&\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.
\end{aligned}$$

(suite).

(iii) Nous pouvons répéter le procédé en (ii) dans une preuve du cas général, par induction sur s. La preuve soi-même n'est pas si difficile, mais la notation est lourde et est peut-être difficile à comprendre. La preuve est donnée dans les notes de cours. $\square$

Exemple :

Combien de suites de 0 et 1's (suites binaires) de longueur huit existent-t-ils telles que le début est 1 ou la fin est 00 ?
Par exemple : $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ ou $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

(1 0 ——— 00)

Réponse :

$$2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$$

Pourquoi ?

Soit $U = \{0,1\}^8$, l'ensemble des suites de longeur 8 , $(x_1, x_2, \ldots, x_8)$, avec les x_i : 0 ou 1.

Soit $A \subseteq U$ le sous-ensemble des suites t.q. $x_1 = 1$, et $B \subseteq U$, le sous-ensemble des suites t.q. $x_7 = x_8 = 0$.

Donc $A \cap B \subseteq U$, le sous-ensmble des suites qui commencent avec $x_1 = 1$ et $x_7 = x_8 = 0$.

Et $A \cup B \subseteq U$ le sous-ensemble des suites qui commencent avec 1 ou finissent par 00.

Il faut compter $|A \cup B|$.

Par le principe du produit, on compte : $|U| = 2^8$, $|A| = 2^7$, $|B| = 2^6$ et $|A \cap B| = 2^5$. Et donc en effet

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2^7 + 2^6 - 2^5.$$

• Une méthode pour compter $|A \cap B|$ par exemple :
On met $x_1 = 1$, et puis on a 2 façons pour choisir x_2, et puis 2 façons pour x_3,..., et puis 2 façons pour x_6, et finalement on met $x_7 = 0$, $x_8 = 0$.

Par le principe du produit répété : $1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 1 \cdot 1 = 2^5$.

• Alternatif (préférable) : Il y une bijection $f : \{0,1\}^5 \to A \cap B$ avec

$$f((y_1, y_2, \ldots, y_5)) = (1, y_1, y_2, \ldots, y_5, 0, 0).$$

Il suit $|A \cap B| = |\{0,1\}^5| = 2^5$. $\square$

Exemple :

Combien existe-t-il de nombres positifs qui n'excèdent pas 1000 et qui sont divisibles par 7 ou 11 ?

Réponse :

$$142 + 90 - 12 = 220$$

Pourquoi ?

142
7
994

(143)
7
>1000

90
11
990

91
11
>1000

12
77
[illegible]

13
77
>1000

Posons $U := \{n \in \mathbb{N} | \ 1 \leq n \leq 1000\}$.
Et $A = \{n \in U | \ 7|n\}$,
$B = \{n \in U | \ 11|n\}$,
$A \cap B = \{n \in U | \ 7|n \text{ et } 11|n\} = \{n \in U | \ 77|n\}$ (car pgcd$(7, 11) = 1$).
$A \cup B = \{n \in U | \ 7|n \text{ ou } 11|n\}$ Il faut compter $|A \cup B|$.

$A = \{n \in U | \ 7|n\} = \{7, 2 \cdot 7 = 14, 3 \cdot 7 = 21, 4 \cdot 7 = 28, \ldots, 141 \cdot 7, 142 \cdot 7\}$, car $142 \cdot 7 = 994 \leq 1000 < 143 \cdot 7 = 1001$.
Donc $|A| = 142$.
Similairement $|B| = 90$ et $|A \cap B| = 12$.

Donc la réponse est

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 142 + 90 - 12 = 220.$$

$\square$

Exemple :

Supposons qu'il y a 1806 étudiants dans un cégep. Parmi ceux-ci, 453 suivent un cours d'info, 567 un cours de math et 299 à la fois un cours de math et d'info.
Combien y a-t-il d'étudiants qui ne suivent ni un cours de math ni un cours d'info.

Réponse : $1806 - 453 - 567 + 299 = 1086$. Pourquoi ?

Posons U pour l'ensemble des étudiants dans ce cégep.
$A \subseteq U$: les étudiants qui suivent un cours d'info ;
$B \subseteq U$: les étudiants qui suivent un cours de math.
Alors $A \cap B$: les étudiants qui suivent un cours d'info et de un cours de math.
$(U - A) - B) = U - (A \cup B)$: les étudiants qui ne suivent ni un cours d'info, ni un cours de math.
Donné : $|U| = 1806$, $|A| = 453$, $|B| = 567$, $|A \cap B| = 299$.
À compter $|U - (A \cup B)|$.
On a

$$\begin{aligned} |U - (A \cup B)| &= |U| - |A \cup B| \\ &= |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B| \\ &= 1806 - (453 + 567) + 299 \\ &= 1085. \end{aligned}$$