Rappel :

La contraposée de $p \to q$ est par définition la proposition $(\neg q) \to (\neg p)$.

(faute d'écriture du manuel p. 7 : ne laissez-vous pas distraire).

La réciproque de $p \to q$ est par définition la proposition $q \to p$.

Montré :

la proposition $p \to q$ et sa contraposée sont logiquement équivalentes :

$$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p).$$

Et

$p \leftrightarrow q$ est vraie si et seulement $p \to q$ et sa reciproque sont vraies :

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$$

Qu'est-ce que vous en pensez :

$q \to p$ est une sorte d'opposé de $p \to q$ (sa réciproque)
et
l'opposé de $(q \to p)$ est $\neg(q \to p)$
et donc
$p \to q$ est la même chose que $\neg(q \to p)$.
Ou, dans la langue de la semaine passée, ça semble que

$$(p \to q) \Leftrightarrow \neg(q \to p) \ ?$$

Raisonable ? Logique ?

NON

Vous avez des doutes ?

Vérifions :

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\neg(q \to p)$	$(q \to p) \leftrightarrow (\neg(q \to p))$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F

NON, c'est une contre-vérité !

Il faut aiguiser le sens critique.

En effet : $q \to p$ n'est pas l'opposé de $p \to q$.

Qu'est-ce que vous en pensez :

E : "...... on a déjà montré que p implique q.... alors q est vraie et ......"

P : "Non, on n'a pas le droit"

E : "Mais, en supposant que p est vraie j'ai montré que q est vraie, n'est-ce pas ? Alors q est vraie, non ?"

P : "Non !, seulement en supposant p vrai, mais si p est faux ?! "

$$[p \wedge (p \to q)] \not\Rightarrow q$$

C'est incontestablement vrai que :

$(”0 = 1”) \to$ "Dieu existe".

Bon.

Il suit donc que "Dieu existe" ? !
Non.
Il suit que "Dieu n'existe pas" ? !
Non.

Mais

" .....on sait que p est vraie et que ça implique q, donc q est vraie ...."

ou

"...... on a déjà montré que p implique q, et on a montré que p est vraie.... alors q est vrai et ......"

sont des raisonnements logiquement corrects, basée sur la tautologie modus ponens :

$$(p \wedge (p \to q)) \Rightarrow q$$

(c.-à-d, toujours vraie, n'importe p et q).

Considérons P :="S'il fait beau je vais nager cet après-midi. Il fait beau. Donc je vais nager cet après-midi."
Vraie ou Fausse ?

$((p \to q) \wedge p) \to q$ ✓

Analyse.
Posons :
p :="il fait beau"
q :=" je vais nager cet après-midi".
Donc :
$p \to q$ = "S'il fait beau je vais nager cet après-midi."
$P = [(p \to q) \wedge p] \to q$.
Donc P est vraie par modus ponens ! !

Est-ce que "il fait beau" ? est-ce que " je vais nager cet après-midi" ? est ce que "" S'il fait beau je vais nager cet après-midi" ? Qui sait. Mais P est vraie.

Rappel : $(p \wedge (p \to q)) \to q$ est une proposition logique toujours vraie, n'importe les propositions p et q.

Preuve par tableau :

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

$$\underbrace{[p \wedge (p \to q)]} \to q$$

Une preuve directe :

Supposons l'hypothèse est vraie ; c.-à-d., p et $p \to q$ sont supposés vraies.
$p \to q$ vraie veut dire par définition : soit (i) p est fausse, soit (ii) p et q sont vraies. Un des deux cas.
Mais on a supposé p est vraie, donc c'est cas (ii). Ce qui implique que q est vraie aussi.
Donc si l'hypothèse est vraie, la conclusion est vraie aussi. Cet implication est vraie. $\square$

$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ est une proposition logique toujours vraie, n'importe les propositions p et q.

En particulier, si p est remplacé par une autre proposition logique, et q aussi par une autre proposition logique alors l'implication reste vraie.

Exemple : remplace "p" partout dans la formule par $q \vee (r \rightarrow s)$ et "q" partout par $p \rightarrow s$. On obtient que la proposition logique suivante est aussi automatiquement VRAIE :

$$([q \vee (r \rightarrow s)] \wedge ([q \vee (r \rightarrow s)] \rightarrow [p \rightarrow s])) \rightarrow [p \rightarrow s]$$

Une autre règle d'inférence (mais pas intéressante) :

$$([q \vee (r \rightarrow s)] \wedge ([q \vee (r \rightarrow s)] \rightarrow [p \rightarrow s])) \Rightarrow [p \rightarrow s]$$

(attention aux ()'s et [ ]'s).

Preuve de

$$(\neg q \wedge (p \to q)) \Rightarrow \neg p \text{ (modus tollens)},$$

Commençons par modus ponens

$$(p \wedge (p \to q)) \Rightarrow q.$$

Faisons partout les substitutions p par $\neg q$ et q par $\neg p$ (on a le droit !) :

$(\neg q \wedge (\neg q \to \neg p)) \Rightarrow \neg p.$

Puis utilisons l'équivalence logique
$(\neg q \to \neg p) \Leftrightarrow (p \to q)$

nous obtenons modus tollens :
$(\neg q \wedge (p \to q)) \Rightarrow \neg p.$

$\square$

P

"S'il fait beau je vais nager cet après-midi. Je ne vais pas nager cet après-midi. Donc il ne fait pas beau."

Cette proposition composée (ou cet argument) est vraie par modus tollens.

Mais je ne sais pas si "S'il fait beau je vais nager cet après-midi" est vraie ou fausse ! !

$$P = ((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$$

$$= \text{vraie}$$

"S'il fait beau je vais nager cet après-midi. Si je vais nager cet après-midi, je dormirai bien ce soir. Donc s'il fait beau je dormirai bien se soir."
Cette proposition composée (ou cet argument) est vraie, par

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \Rightarrow (p \to r) \text{ (syllogisme par hypothèse)}$$

On peut combiner des règles d'inférence et les équivalences logiques :

Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ alors aussi $P \Rightarrow R$.

$\rightarrow$

Et
$P \Leftrightarrow Q$ si et seulement si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

$\longleftrightarrow$

Exemple :

$$[(p \vee q) \rightarrow r] \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

implique la règle d'inférence

$$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$$

Preuve algébrique de l'équivalence logique

$$\boxed{[(p \vee q) \to r] \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r).}$$

$$\begin{aligned}
[(p \vee q) \to r] &\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r \text{ (Car } (p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r \text{ (Par De Morgan)} \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \text{ (Par distr.)} \\
&\Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r) \text{ (Car } (p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q))
\end{aligned}$$

$$P \to Q \Longleftrightarrow \neg P \vee Q$$

Qu'est-ce que vous pensez :

"C'est certain que si quelqu'un fait beaucoup des haltères il sera fort. Vous êtes fort. Donc vous devez avoir faites beaucoup des haltères. Non ?"

Non, ce n'est pas un argument acceptable.

$$((p \to q) \wedge q) \to p$$

Pas toujours vrai

Une formule qui n'est pas une tautologie est appelée : contrevérité.

Par exemple :

$$P(p, q) := [(p \to q) \wedge q] \to p$$

n'est PAS une tautologie, donc une contrevérité, car si p est fausse et q vraie, alors P est fausse.
Si on sait seulement que q est vraie, on ne sait pas encore si P est vraie ou fausse ! Considérons :

"... ainsi on a montré que p implique q. Parce que on sait aussi que q est vraie, on conclut que p est aussi vraie. "

cet argument n'est pas logiquement correct, évidemment.

Qu'est-ce que vous pensez :

"C'est certain que si quelqu'un fait beaucoup des haltères il sera fort. Vous ne faites pas beaucoup des haltères. Donc vous ne serez pas fort !"

"L'argument" est basée sur une autre contrevérité "utilisée" souvent :

$$P := [(p \to q) \land \neg p] \to \neg q$$

Donc ce n'est pas acceptable comme argument.

Considérons l'argument :

P :=" Si 32085 est divisible par 13, alors 32085^2 est divisible par $13^2 = 169$. Le nombre 32085 est divisible par 13. Par conséquent, 32085^2 est divisible par 169".

NON

Analyse : posons p ="32085 est divisible par 13", q :="32085^2 est divisible par $13^2 = 169$". Alors $P = [(p \to q) \wedge p] \to q$.
Donc P est vraie par modus ponens !

Cet argument P est valide, alors on peut conclure que 32085^2 est divisible par 169.

Qu'est-ce que vous pensez ?

Calculatrice : $\frac{32085^2}{169} = 6091403.69822....$
Hè ? ! On doit avoir fait une petite erreur quelque part !

En effet.
"Cet argument est valide, alors 32085^2 est divisible par 169"
est basée sur une contre-vérité

vraie

$$([(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q) \rightarrow q$$

(si c'est une tautologie et son hypothèse P est vraie (ce qui est le cas), alors par modus ponens, en effet q serait vraie aussi. Mais.....)

Partie d'un argument :

"... bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla
bla bla bla supposons p vraie bla bla bla
Puis on donne encore plus d'arguments,
bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla bla
ce qui montre finalement que p est vraie.

Donc nous avons montré que p est vraie !"

On suppose p est vraie pour montrer que p est vraie. Hmmm.
Raisonnement circulaire.

Preuve par l'absurde ou Reductio ad absurdum

Une telle preuve peut être basée sur la règle d'inférence :

$$[(\neg p \to (q \wedge \neg q)] \Rightarrow p$$

ou sur la règle

$$[(\neg p \to q) \wedge \neg q] \Rightarrow p$$

Supposons on veut montrer qu'une proposition p est vraie.
En supposant p est fausse, on montre une proposition auxiliaire disons q. Alors que $\boxed{\neg p \to q}$ est vraie.
Puis on montre (ou on sait déjà) que son opposé $\neg q$ est vraie.
Donc l'hypothèse de la règle d'inférence est vraie :

$$[(\neg p \to q) \wedge \neg q] \Rightarrow p.$$

C'est une règle d'inférence, donc aussi la conclusion p est vraie.

Soient A et B deux ensembles et $F : A \to B$ et $G : B \to A$ deux fonctions telles que $G \circ F = 1_A$.

$(G\circ F)(a) = a$

Considérons la proposition logique

p :="F est injective".

Preuve par l'absurde : Supposons p est faux, c.-à-d., F n'est pas injective. Par définition d'injectivité, ils existent deux éléments a_1, a_2 de A telles que $F(a_1) = F(a_2)$, mais $a_1 \neq a_2$. Parce que $G \circ F = 1_A$ on a

$$a_1 = 1_A(a_1) = G(F(a_1)) = G(F(a_2)) = 1_A(a_2) = a_2.$$

Donc sous l'hypothèse que p est fausse, on a montré la proposition q :="ils existent a_1, a_2 dans A tels que $a_1 = a_2$ et $a_1 \neq a_2$" est vraie. Ce qui est absurde, car son opposé, $\neg q$, est vraie.
On conclut p est vraie. $\square$

Soit P une proposition en mathématiques.

Théorème

P

Preuve par l'absurde typique.

Supposons P est fausse. Puis (avec cette hypothèse et avec de l'aide de théorèmes déjà montrés) on montre une proposition auxiliaire, disons q. Puis on montre directement (sans utiliser l'hypothèse que P est fausse) que q est fausse. Ce qui serait absurde.

On conclut : P est vraie. □

Un cas spécial. Soient P et Q deux propositions en mathématiques.

Théorème

$P \to Q$

Preuve par l'absurde typique.

Supposons $P \to Q$ est fausse, c.-à-d., supposons P vraie et Q fausse. Puis (avec ces deux hypothèses et avec de l'aide de théorèmes déjà montrés) on montre une proposition auxiliaire, disons r. Puis on montre directement (sans utiliser l'hypothèse que $P \to Q$ est fausse) que r est fausse. Ce qui serait absurde.
On conclut : $P \to Q$ est vraie. $\square$

Si on veut montrer $P \to Q$ il y a trois types de preuves typiques, trois stratégies.
Preuve directe. Avec l'hypothèse P on montre (avec de l'aide de théorèmes déjà établis) Q.
Preuve indirecte. Avec l'hypothèse $\neg Q$ on montre (avec de l'aide de théorèmes déjà établis) $\neg P$.
Preuve par l'absurde. Avec les hypothèse P et $\neg Q$ on montre (avec de l'aide de théorèmes déjà établis) une absurdité auxiliaire.

Il y a des liens entre la logique et la théorie des ensembles.

Soit $A \subseteq U$ et $B \subseteq U$ deux sous-ensembles.
Fixons un $u \in U$ et considérons :
$p :=$"$u \in A$"
$q :=$"$u \in B$".
Alors
$p \wedge q =$ "$u \in A$"$\wedge$ "$u \in B$" $=$ "$u \in A$ et $u \in B$"$=$"$u \in A \cap B$" (par définition de $\cap$.
Et
$p \vee q =$ "$u \in A$"$\vee$ "$u \in B$" $=$ "$u \in A$ ou $u \in B$"$=$"$u \in A \cup B$" (par définition de $\cup$.

Montrer :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

implique

Preuve : Fixons $u \in U$ en utilise les notations p et q.
Par définition de complément :
$\neg p$="$u \notin A$" ="$u \in \overline{A}$"
$\neg q$="$u \notin B$" ="$u \in \overline{B}$".
Et $(\neg p) \vee (\neg q)$="$u \in \overline{A} \cup \overline{B}$".
Aussi
$\neg(p \wedge q)$="$u \in \overline{A \cap B}$".
Par De Morgan : $(\neg p) \vee (\neg q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$.
Donc "$u \in \overline{A} \cup \overline{B}$" si et seulement si "$u \in \overline{A \cap B}$".
Donc nous avons montré que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. $\square$

Soit $p(u)$ une fonction propositionnelle avec univers de discours U.
$p : U \to \{$ propositions logiques$\}$.

$$U_V := \{u \in U | \ p(U) \text{ est vraie}\}$$

$$U_F := \{u \in U | \ p(U) \text{ est fausse}\}$$

Fin

On a $U = U_V \cup U_F$ et $U_V \cup U_F = \emptyset$.
Donc $U_V = U$ si et seulement si $U_F = \emptyset$.
Par définition :
$\forall u \ p(u)$ si et seulement si $U_V = U$ si et seulement si $U_F = \emptyset$.
$\neg(\forall u \ p(u))$ si et seulement si $U_V \neq U$ si et seulement si $U_F \neq \emptyset$.
$\exists u \ p(u)$ si et seulement si $U_V \neq \emptyset$ si et seulement si $U_F \neq U$.
$\forall u \ \neg p(u)$ si et seulement si $U_F = U$ si et seulement si $U_V = \emptyset$.
$\exists u \ \neg p(u)$ si et seulement si $U_F \neq \emptyset$ si et seulement si $U_V \neq U$.
Conclusion :

$$\neg(\forall u \ p(u)) \Leftrightarrow \exists u \ \neg p(u) \quad \text{et} \quad \neg(\exists u \ p(u)] \Leftrightarrow \forall u \ \neg p(u)$$

Nous avons déjà discuté certains preuves typiques. Il y en a d'autres :

Preuve vides

Supposons on doit montrer $P \to Q$.
Si on sait que P est faux ou si Q est vraie : il n'y a plus rien à faire ! L'implication est vraie.

Preuves cas-par-cas

Exemple : Soit $U := \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ l'univers de discours de

$p(u)$:="u est la somme de trois carrés parfaits".

Montrer la proposition

$\forall u \ p(u)$

Preuve cas par cas :

$2 = 0 + 1 + 1$, $4 = 0 + 0 + 4$, $6 = 1 + 1 + 4$, $8 = 0 + 4 + 4$,
$10 = 0 + 1 + 9$, $12 = 4 + 4 + 4$, $14 = 1 + 4 + 9$, $16 = 0 + 0 + 16$,
$18 = 0 + 9 + 9$. $\square$

On veut montrer $P \leftrightarrow Q$?

Il suffit de montrer cas par cas que $P \to Q$ et $Q \to P$.

—

On veut montrer $(p \vee q) \to r$?

Il suffit de montrer cas par cas que $p \to r$ et $q \to r$.

Soit n un nombre naturel fixé. À montrer :
"Si n n'est pas divisible par 3 alors $n^2 - 1$ est divisible par 3".

Preuve :
Posons p_1 :="il existe un nombre naturel m tel que $n = 3m + 1$" ;
p_2 :="il existe un nombre naturel m tel que $n = 3m + 2$" ;
En math. au cegep (ou avant) on a montré que :
"n n'est pas divisible par 3" si et seulement si $p_1 \vee p_2$.
Posons r :="$n^2 - 1$ est divisible par 3".
Il suffit de montrer : $(p_1 \vee p_2) \to r$ ou de montrer $p_1 \to r$ et $p_2 \to r$.
Preuve cas-par-cas :
Preuve de $p_1 \to r$: On a que $n^2 - 1 = (3m + 1)^2 - 1 = 9m^2 + 6m = 3(3m^2 + 2m)$ est un 3-multiple.
Preuve de $p_2 \to r$: On a que $n^2 - 1 = (3m + 2)^2 - 1 = 9m^2 + 12m + 3 = 3(3m^2 + 4m + 1)$ est un 3-multiple.

Soit $p(u)$ une fonction propositionnelle avec domaine de discours U.
Rappelons : "$\forall u \; p(u)$" est fausse si et seulement s'il existe au moins un u tel que $p(u)$ est fausse.
Traduction :

$$\neg(\forall u \; p(u)) \Leftrightarrow \exists u \; (\neg p(u))$$

Et "$\exists u \; p(u)$" est fausse si et seulement si pour chaque u on a que $p(u)$ est fausse.
Traduction :

$$\neg(\exists u \; p(u)) \Leftrightarrow \forall u \; (\neg p(u))$$