Feuille d'Exercices I
Calcul Stochastique

Exercice 1. On considère la marche aléatoire simple S_n.

1. Montrer la formule
$$\mathbb{P}(S_{2k} = 0 \,|\, S_0 = 0) = \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}$$

2. En utilisant la formule de Stirling sur la formule dessus, montrer que $\mathbb{E}[N_n] \to \infty$ où N_n est le nombre de visites en zéro par S_k pour $k \leqslant n$.

3. Le but de la question est de montrer que la marche aléatoire symétrique est *récurrente* i.e.
$$\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ pour un nombre infini de } n) = 1$$

a. On considére $N = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{1}_{S_n=0}$. Montrer que $\mathbb{E}[N] = \infty$.

b. Montrer que $\mathbb{E}[N] = \frac{r}{1-r}$ avec
$$r = \mathbb{P}(S_n = 0 \text{ pour un } n \geqslant 1 \,|\, S_0 = 0).$$

c. En déduire que la marche aléatoire est récurrente.

Exercice 2. On considère la marche aléatoire symétrique commençant en 0. On définit
$$N_k = \text{nombre de fois où on a atteint } k \text{ avant de retourner en } 0.$$

1. Montrer que $\mathbb{P}(N_k > 0) = \frac{1}{2k}$.

2. Montrer que $\mathbb{P}(N_k > j+1 \,|\, N_k > j) = \frac{1}{2} + \frac{k-1}{2k}$.

3. En déduire que $\mathbb{E}[N_k] = 1$.

Exercice 3. Soit $\{M_n\}$ une martingale pour une filtration $\{\mathcal{F}_n\}$ telle que $\mathbb{E}[M_n^2] < \infty$ pour tout n. Montrer que l'on peut écrire
$$M_n^2 = N_n + A_n$$
où $\{N_n\}$ est une martingale pour la filtration $\{\mathcal{F}_n\}$ et A_n est un processus prévisible et monotone ($A_n \geqslant A_{n-1}$).
Indication : on pourra écrire $A_{n+1} = A_n + \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2 | \mathcal{F}_n]$ pour $n \geqslant 1$ et $A_0 = 0$.

Exercice 4. On suppose que $\{M_n\}$ est une sous-martingale et que ν et τ sont deux temps d'arrêt bornés tels que $\nu \leqslant \tau$. Prouver que $\mathbb{E}[M_\nu] \leqslant \mathbb{E}[M_\tau]$

Exercice 5. On considère une suite d'événements indépendants A_i satisfaisant
$$\phi(n) := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Soit $\tau_k = \min\{n \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} = k\}$. Montrer en appliquant le théorème d'arrêt de Doob à une martingale bien choisie que pour tout $k \geqslant 1$,
$$\mathbb{E}[\phi(\tau_k)] = k$$

George Pólya
(1887–1985)

Joseph Leo Doob
(1910–2004)