

Feuille d'Exercices IX

Processus Stochastiques

Exercice 1. Reprendre l'exemple du remplacement de la voiture mais supposer maintenant que la longévité de la voiture est donnée par une loi exponentielle de paramètre λ . Montrer que quel que soit A ou B , le meilleur $T = \infty$. Pourquoi cela n'est pas surprenant ?

Exercice 2. Une docteur travaille aux urgences. Des urgences arrivent comme un processus de Poisson d'intensité $\frac{1}{2}$ par heure. La docteur ne peut que dormir si au moins 36 minutes (.6 heures) se sont passées depuis la dernière urgence.

Par exemple, si une urgence se passe à 2h00 et une autre à 2h32 alors elle ne pourra que dormir après au moins 3h08 s'il n'y a pas d'autres urgences avant.

1. Calculer la fraction de temps limite où la docteur dort. On construira un processus de renouvellement composé.
2. Au i -ème renouvellement, la docteur dort un temps d_i et est réveillée pendant un temps r_i . Calculer $\mathbb{E}[r_i]$.

Exercice 3. On considère une chaîne de Markov en temps discret sur $\{0, 1\}$ et matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

On commence la chaîne en 1 et soient $T_1, T_2, \dots$ les temps de retours successifs de la chaîne en 0, en particulier $T_1 \geq 1$. On définit alors

N_t = Nombre de retours à l'état 0 jusqu'au temps t .

1. Montrer que N_t est un processus de renouvellement.
2. Calculer la limite presque sûre de $\frac{N_t}{t}$.

Exercice 4. Soit N un processus de renouvellement. Soit $(t_i)_{i \geq 1}$ les temps d'inter-arrivées. On suppose que les t_i sont i.i.d et ont une densité f_t .

1. Montrer que pour tout $x > 0$ et $t > x$ on a

$$\mathbb{E}[N_t | t_1 = x] = \mathbb{E}[N_{t-x}] + 1.$$

2. Montrer que

$$\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{P}(t_i \leq t) + \int_0^t \mathbb{E}[N_{t-x}] f_t(x) dx.$$

3. En écrivant $\mathbb{E}[N_t] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(N_t \geq n)$ et en décrivant l'événement $\{N_t \geq n\}$ d'une autre façon, retrouver l'équation ci-dessus.

Exercice 5. On considère un processus de renouvellement où la distribution des temps d'inter-arrivées est discrète i.e.

$$\mathbb{P}(t_i = k) = p_k \quad \text{avec} \quad \sum_{k \geq 1} p_k = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[t_i] = \sum_{k \geq 1} k p_k = \mu < \infty.$$

1. On définit l'âge et le temps résiduel de la façon suivante. On définit, avec T_i les temps de renouvellement,

$$V_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{0, T_1, T_2, \dots\}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad A_n = \min\{n - m, m \leq n, V_m = 1\}, \quad Z_n = \min\{m - n, m \geq 1, V_m = 1\}.$$

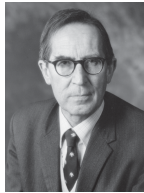
Donner un exemple des quinze premiers $n \in \{0, 1, \dots, 15\}$ de ces processus.

2. Avec l'exemple que vous avez donné ci-dessus, expliquer pourquoi on a

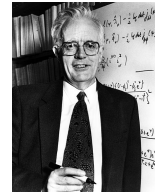
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \mathbb{P}(A_m = i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \mathbb{P}(Z_m = i).$$

Ainsi, en moyenne, A et Z ont la même distribution.

3. Montrer que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov et donner ses probabilités de transition.
4. Montrer que si il y a une infinité de k tels que $p_k > 0$ alors la chaîne est irréductible. On supposera être dans ce cas.
5. Montrer que si $\text{pgcd}\{k, p_k > 0\} = 1$ alors la chaînes est apériodique. On supposera être dans ce cas.
6. Montrer que la mesure définie par $\mu_k = \mathbb{P}(t_i > k)$ est une mesure stationnaire. Montrer que la chaîne Z est récurrente positive.
7. En déduire la distribution limite de Z .



David George Kendall
(1918–2007)



David Roxbee Cox
(1924–2022)

