

Feuille d'Exercices VII

Processus Stochastiques

Exercice 1. Soit N un processus de Poisson d'intensité λ . Avec T_i , le temps du i -ième saut, on définit

$$G_t = t - T_{N_t} \quad \text{et} \quad D_t = T_{N_t+1} - t.$$

1. Tracer une trajectoire de N et indiquer ce que représente T_{N_t} , T_{N_t+1} ainsi que G_t et D_t .
2. Soit $t > 0$, calculer, pour $0 < x \leq t$, $y \geq 0$, $\mathbb{P}(G_t < x, D_t \leq y)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(G_t = t, D_t \leq y)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(D_t \leq y)$. Quelle est la loi de D_t ?
5. Calculer la fonction de répartition de G_t .
6. Montrer que G_t a la même loi que $\min(T_1, t)$.
7. Montrer que G et D sont indépendantes.
8. Calculer $\mathbb{E}[G_t]$ et $\mathbb{E}[G_t + D_t]$. Que pouvons-nous trouver de remarquable sur ce résultat?

Exercice 2. On considère la météo de Montréal en hiver sur 3 états: Ensoleillé, Nuageux, et Neige. On suppose que le temps reste ensoleillé pendant un nombre moyen de 3 jours puis il devient nuageux. Il reste nuageux en moyenne 4 jours puis il neige. Il neige alors pendant un jour en moyenne puis il fait beau à nouveau. On suppose que ces temps sont exponentiels et indépendants.

1. Donner la Q -matrice de la chaîne de Markov.
2. Trouver la distribution stationnaire pour la chaîne.
3. Que peut-on remarquer sur les valeurs de la distribution par rapport à la description de la chaîne ?

Exercice 3. On considère un processus linéaire avec immigration. Cela correspond au processus sur $\mathbb{N}$ tel que sur l'état i , on attend un temps exponentiel de moyenne $i\nu + i\mu + \lambda$ puis on saute sur $i - 1$ avec probabilité $\frac{i\mu}{i\nu + i\mu + \lambda}$ et sur $i + 1$ avec probabilité $\frac{i\nu + \lambda}{i\nu + i\mu + \lambda}$. On peut penser à ce processus comme des particules qui se dédoublent en taux ν , qui meurent en taux μ ou qui arrivent de l'extérieur en taux λ . On admet que ce processus existe pour tout temps.

1. Donner la Q -matrice du processus.
2. Donner l'équation progressive de Kolmogorov.
3. On dénote le nombre moyen d'individus au temps t sachant qu'on commence avec i particules

$$M_t = \sum_{j \geq 0} j \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i).$$

En utilisant l'équation progressive de Kolmogorov, montrer que

$$\frac{d}{dt} M_t = (-\mu + \nu) M_t + \lambda.$$

4. Résoudre cette équation et en déduire que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_t = \begin{cases} +\infty & \text{si } \nu \geq \mu, \\ \frac{\lambda}{\mu - \nu} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4. On considère maintenant le même processus que ci-dessus mais sans immigration i.e. $\lambda = 0$.

1. Y a-t-il un état absorbant ? Si oui, lequel ?
2. Que remarque-t-on sur les probabilités de transition d'un état à un autre ?
3. En faisant une comparaison avec la ruine du joueur vu en cours plus tôt, donner la probabilité d'extinction sachant que l'on commence avec k particules.
4. En utilisant le conditionnement au premier saut, montrer que , avec $\tau_k = \mathbb{E}[\min_{t \geq 0} \{X_t = 0\} | X_0 = k]$,

$$\tau_k - \tau_{k+1} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j\nu} \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{k-j} - \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^k \tau_1.$$

Indication: On essaiera d'écrire $\tau_k - \tau_{k+1}$ et terme de $\tau_{k-1} - \tau_k$

5. En justifiant que $\tau_i \leq \tau_{i+1} \leq \tau_i + \tau_1$ montrer que, en admettant que $\tau_1 < \infty$,

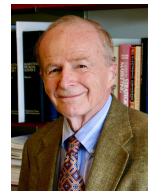
$$\tau_1 = \begin{cases} +\infty & \text{si } \mu = \nu, \\ \frac{1}{\nu} \log \left(\frac{\mu}{\mu - \nu} \right) & \text{si } \nu < \mu. \end{cases}$$

Exercice 5. On considère une file d'attente $M/M/\infty$. Cela correspond à un système avec des clients qui arrivent en temps exponentiel (M pour Markovien) d'intensité ν devant une infinité (∞) de caissiers et qui sont traités selon un temps exponentiel (M) d'intensité μ .

1. Donner la Q -matrice du nombre de clients qui sont en train d'être traités.
2. Montrer par récurrence que la distribution stationnaire du processus est donnée par une distribution de Poisson de paramètre $\frac{\nu}{\mu}$.
3. Montrer alors que le nombre moyen de clients dans le système à l'état stationnaire est égal au temps moyen passé dans le système par un client fois le taux d'arrivée des clients. C'est la loi de Little.



Agner Krarup Erlang
(1878–1929)



John Dutton Conant Little
(1928–2024)

