

Feuille d'Exercices VII

Processus Stochastiques

Exercice 1. Un coiffeur réalise une coupe à un taux de 3 coupes par heures i.e. chaque coupe prend un temps exponentiel de paramètre de moyenne 20 minutes. On suppose que les clients arrivent comme un processus de Poisson de taux 2 mais ils n'attendent pas si les deux seules chaises de la salle d'attente sont prises (en particulier il y a au maximum 3 clients dans le salon).

1. Calculer la matrice de transition du trajet de la chaîne et la Q -matrice de la chaîne.
2. En utilisant le conditionnement sur le premier saut, calculer pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$,

$$u_i = \mathbb{E} \left[\inf_{t \geq 0} \{X_t = 0\} \middle| X_0 = i \right].$$

3. On veut essayer de faire cela de manière systématique, montrer que si on considère pour $A \subset \{1, 2, 3\}$,

$$u_{A,i} = \mathbb{E} \left[\inf_{t \geq 0} \{X_t \in A\} \middle| X_0 = i \right]$$

alors on a $u_{A,i} = 0$ pour $i \in A$ et

$$\sum_{j \in S} Q_{ij} u_{A,j} = -1 \quad \text{pour } i \notin A.$$

4. En déduire que si on dénote Q^{A^c} la matrice Q où on ne considère que les indices dans A^c , et $\mathbf{1}$ le vecteur formé que de 1, alors

$$u_A = - \left(Q^{A^c} \right)^{-1} \mathbf{1}$$

5. En déduire le temps moyen d'attente pour que le salon soit complètement occupé ou complètement vide sachant qu'il y a i clients au temps 0 pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Exercice 2. Mégane, Samuel et Léa sont en heures de bureau. Le temps qu'ils restent est donné par une variable exponentielle de moyenne respective 1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

1. Quel est le temps moyen pour qu'il reste un seul étudiant ?
2. Pour chaque étudiant, quel est la probabilité que ce soit le dernier restant ?
3. Quel est le temps moyen jusqu'à ce que tous les étudiants soient partis ?
4. Pour la première et dernière question, retrouver le résultat en utilisant l'exercice précédent. On construira une chaîne de Markov en temps continu adaptée.

Exercice 3. Soient $(N_t^{(1)})_{t \geq 0}$ et $(N_t^{(2)})_{t \geq 0}$ deux processus de Poisson indépendants de paramètre $\lambda > 0$. On définit les deux processus pour $r > 0$ fixé,

$$N_t = \begin{cases} N_t^{(1)} & \text{si } t < r, \\ N_t^{(2)} & \text{si } t \geq r. \end{cases}, \quad \tilde{N}_t = \begin{cases} N_t^{(1)} & \text{si } t < r, \\ N_r^{(1)} + N_t^{(2)} - N_r^{(2)} & \text{si } t \geq r. \end{cases}$$

1. Donner la loi de N_t pour tout $t \geq 0$.
2. Est-ce que N est un processus de Poisson, et si oui quel est son intensité ?
3. Donner la loi de $\tilde{N}_t$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que $\tilde{N}$ est un processus à accroissements indépendants.
4. Est-ce que $\tilde{N}$ est un processus de Poisson, et si oui quel est son intensité ?

Exercice 4. On considère trois vendeurs de bagels dans Montréal (Fairmount, St-Viateur, La Fabrique de Bagel) ouverts 24h/24. On suppose que les arrivées des clients dans chaque vendeur forment des processus de Poisson indépendants. Dans une journée, en moyenne, 2400 clients sont arrivées dans le premier, 1200 dans le deuxième, et 1800 dans le troisième (je vous laisse choisir qui est qui).

1. Donner les intensités des processus.
2. Quelle est la loi du nombre de clients à être passés chez un vendeur de bagels dans une heure ?
3. On sait que seulement un cinquième de clients achète un sachet de douze bagels. Calculer la probabilité de vendre en une journée au moins 120 sachets de douze bagels.

On considère maintenant un magasin de bagels à Burlington. Les arrivées de clients sont modélisées par un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ que l'on note N . On note T_i l'arrivée du i -ème client T_i .

1. Soient $0 < t < T$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}(T_1 > t | N_T = n)$.
2. Soient $0 < t < s < T$ et $n \geq 2$. Calculer $\mathbb{P}(T_1 > t, T_n \leq s | N_T = n)$ et $\mathbb{P}(T_2 > t | N_T = n)$.

Exercice 5. Soit N un processus de Poisson d'intensité λ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ une famille de variables aléatoires i.i.d et indépendantes de N . On définit le processus

$$S_t = \sum_{n=1}^{N_t} Y_n.$$

1. Pour quelle loi sur Y_i retrouve-t-on un processus de Poisson d'intensité λ ?
2. On suppose que $Y_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ avec $p \in [0, 1]$. S est-il un processus de Poisson ? Si oui, quel est son intensité ?
3. On note ϕ la fonction caractéristique de Y_i et ψ_t la fonction caractéristique de S_t . Montrer que

$$\psi_t(r) = e^{\lambda t(\phi(r)-1)}$$

Indication: On pourra utiliser le fait que $\psi_t(r) = \mathbb{E}[e^{irS_t}] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}[e^{irS_t} \mathbf{1}_{N_t=k}]$.

4. On suppose que les Y_i sont centrées et de variance finie σ^2 . Montrer que

$$\frac{S_t}{\sigma\sqrt{\lambda t}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$



Ernst Filip Oskar Lundberg
(1876–1965)



William Feller
(1906–1970)

