

Feuille d'Exercices VI

Processus Stochastiques

Exercice 1. On a vu que si une chaîne de Markov P est irréductible, apériodique et récurrente positive alors

$$P_{ij}^n \rightarrow \pi_j$$

1. Donner un exemple de chaîne de Markov irréductible et récurrente positive (mais périodique) tel que P_{ij}^n ne converge pas.
2. Montrer que si une suite $a_n \rightarrow \alpha$ lorsque $n \rightarrow \infty$ alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$.
3. En déduire que si on enlève l'hypothèse d'apériodicité alors on a tout de même,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ij}^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi_j.$$

Exercice 2. On considère la marche aléatoire symétrique X donnée par

$$X_n = \sum_{k=0}^n Y_k$$

avec $Y_1, Y_2, \dots$ une famille de variables aléatoires i.i.d à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que c'est une chaîne de Markov.
2. On suppose que Y_k est distribuée de la façon suivante

$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_k = -1).$$

Dessiner le graphe de X et donner sa matrice de transition.

3. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$.

$$P_{ii}^{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad P_{ii}^{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

4. En utilisant le fait que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{4}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

montrer que X est récurrente si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

5. Montrer que la chaîne est irréductible, quelle est sa période?
6. Montrer que la mesure μ définie par pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mu_k = \left(\frac{p}{1-p}\right)^k$ est réversible pour X et ainsi est stationnaire.
7. Montrer que la mesure $\nu_k = 1$ est stationnaire.
8. En déduire que la chaîne X avec $p = \frac{1}{2}$ est récurrente nulle.

Exercice 3. On définit la chaîne de Markov sur $S = \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ donnée par la matrice de transition

$$P_{k1} = p_k, \quad P_{k,k+1} = q_k$$

avec $0 < p_k, q_k < 1$ et $q_k = 1 - p_k$.

1. Dessiner le graphe de P .
2. Montrer que la chaîne est irréductible et apériodique.

3. Calculer

$$\mathbb{P} \left(\min_{k \geq 1} \{X_k = 1\} > n \mid X_0 = 1 \right).$$

4. Montrer que la chaîne est transiente si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n q_k > 0$.

5. Montrer, en passant sous forme exponentielle, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n q_k > 0 \iff \sum_{k=1}^{\infty} p_k < +\infty$.

6. Ainsi, que se passe-t-il quand $p_k = \frac{1}{k+1}$ ou $p_k = \frac{1}{(k+1)^2}$.

7. Dans le cas $p_k = \frac{1}{k+1}$, calculer exactement

$$\mathbb{P} \left(\min_{k \geq 1} \{X_k = 1\} > n \mid X_0 = 1 \right).$$

et retrouver la conclusion de la question précédente.

Exercice 4. Soit X une chaîne de Markov définie sur $S = \{0, 1, 2, 3\}$ par la matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Donner le graphe associé.

2. Est-ce que la chaîne est irréductible?

3. On note $X^{0,2}$ la chaîne de Markov restreinte aux états 0 et 2. Pourquoi la chaîne admet-elle une unique probabilité stationnaire? Déterminer la.

4. De même pour $X^{1,3}$ la chaîne restreinte aux états 1 et 3.

5. Dédurre deux distributions stationnaires π et μ pour la chaîne initiale P .

6. Soit $\lambda \in [0, 1]$, montrer que $\lambda\pi + (1 - \lambda)\mu$ est une distribution stationnaire pour P . En déduire que P admet une infinité de distributions stationnaires.



George David Birkhoff
(1884–1944)



John von Neumann
(1903–1957)

