

Feuille d'Exercices V

Processus Stochastiques

Exercice 1. On considère la chaîne de Markov de l'**Exercice 2** de la **Feuille III**, qui nous fait gagner \$1 avec probabilité p et nous fait tout perdre avec probabilité $1 - p$.

1. Trouver une probabilité stationnaire pour cette chaîne de Markov.
2. En déduire ainsi que la chaîne est récurrente positive et donner le temps moyen de retour en 0 sachant que la chaîne est partie de 0.
3. Retrouver ces résultats directement avec les réponses à l'**Exercice III.2**.

Exercice 2. On considère la chaîne de Markov donnée par le modèle d'Ehrenfest dans le cas général avec N particules en total.

1. Déterminer une distribution réversible pour cette chaîne et en déduire la probabilité stationnaire.
2. On suppose que l'on commence avec $X_0 = \frac{N}{2}$ (il y a la moitié des particules dans chaque compartiment). Calculer le temps moyen pour revenir à cet état. Même question pour $X_0 = N$ (toutes les particules sont dans un seul compartiment). Évaluer ces temps moyens pour $N = 12$.

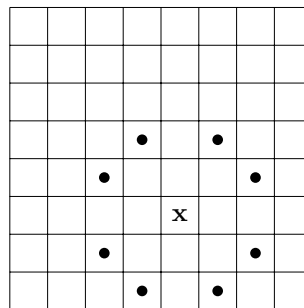
Exercice 3. Un graphe sans boucle $G = (V, E)$ est un ensemble fini de sommets V et de paires de sommets $(u, v) \in V^2$ avec $u \neq v$. On dit que $\{u, v\} \in E$ est une arête du graphe. Le degré d'un sommet du graphe est donné par

$$\deg(u) = \#\{v \in V, \{u, v\} \in E\}.$$

On définit la chaîne de Markov sur V donnée par la matrice de transition

$$P_{uv} = \begin{cases} \frac{1}{\deg(u)} & \text{si } \{u, v\} \in E, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Sous quelles conditions sur le graphe G la matrice est-elle irréductible ? Même question pour apériodique.
2. Expliquer pourquoi $\sum_{u \in V} \deg(u) = 2\#E$.
3. On suppose que la chaîne est irréductible, trouver une probabilité réversible pour cette chaîne de Markov.
4. On considère maintenant un cavalier sur un échiquier, c'est une pièce qui bouge de la façon suivante Donner



les degrés de chaque carrés de l'échiquier.

5. En déduire le temps moyen de retour dans un coin pour un cavalier qui fait une marche aléatoire sur l'échiquier avec la matrice de transition P .

Exercice 4. On considère une urne avec N_1 balles blanches et N_2 balles noires, et avec deux compartiments A et B contenant respectivement $a \geq 1$ balles et $b \geq 1$ balles ; $N_1 + N_2 = a + b$, et chaque compartiment peut contenir des balles blanches et des balles noires. On note X_n le nombre de balles blanches dans le compartiment A au temps n ; c'est une quantité entière entre $\max(0, a - N_2)$ et $\min(N_1, a)$.

1. Donner en fonction de N_1, N_2, a, b , et de X_n le nombre de balles blanches ou de balles noires dans chaque compartiment au temps n .

2. L'évolution de la chaîne est donnée de la façon suivante. Pour passer de X_n à X_{n+1} :

- On tire au hasard dans chaque compartiment une balle ; toutes les balles du compartiment A ou du compartiment B sont équiprobables.
- On échange la position des deux balles tirées au hasard : celle du compartiment A va en B et vice-versa.

Donner la matrice de transition P de $(X_n)_{n \geq 0}$. Donner l'espace d'états et montrer que la chaîne est irréductible.

3. On suppose que $N_1 \leq a \leq N_2$. Trouver l'unique distribution stationnaire π pour P . Quelle mesure de probabilité obtenons-nous ?

Exercice 5. Plus difficile. Soit P un polygone convexe avec au moins 3 côtés. On applique l'opération suivante: on choisit uniformément au hasard deux côtés de P puis on joint les milieux de ces côtés, on garde ensuite l'un des deux nouveaux polygones convexes que cela crée. On continue alors cette opération sur le nouveau polygone et on note $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des nombres de côtés des polygones ainsi obtenus. On commence avec $C_0 = 3$ et on admet que cela donne une chaîne de Markov.



Figure 1: Dans cet exemple, nous avons $C = (3, 4, 4, 5, \dots)$.

1. Si $C_n = k$, montrer que $C_{n+1} = \{3, 4, \dots, k+1\}$. Montrer que C est irréductible sur l'espace d'état $\{3, 4, 5, \dots\}$.
2. Soit $X_n = C_n - 3$. On admet que X est une chaîne de Markov, donner sa matrice de transition Q .
3. On remarque que $X_0 = 0$. Calculer $\mathbb{E}[X_n | X_0 = 0]$ pour tout $n \geq 0$ par récurrence.
4. On cherche une distribution stationnaire pour Q (qui peut-être n'existe pas). On définit la fonction génératrice $G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi(n)s^n$. Montrer que si $\pi Q = \pi$ alors

$$(s-1)G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi(k)}{k+2} (s^{k+2} - 1).$$

En dérivant cette équation, trouver la valeur de G .

5. En déduire la distribution stationnaire, reconnait-on cette distribution ?



Jacob Bernoulli
(1655–1705)



Pierre-Simon de Laplace
(1749–1827)

