

Feuille d'Exercices III

Processus Stochastiques

Exercice 1. Considérons un fort carré pourvu d'un poste de garde à chaque coin. Une seule sentinelle est de garde ce jour-là. Elle a pour rôle de tromper l'ennemi et pour cela elle a l'ordre d'effectuer sa ronde de la manière aléatoire suivante. Elle monte la garde 5 minutes dans un des quatre postes, puis elle tire à pile ou face une pièce équilibrée ; si elle tire pile, elle se rend au premier poste sur sa gauche et si elle tire face, elle se rend au premier poste sur sa droite. Elle y monte la garde 5 minutes et de nouveau elle tire à pile ou face le nouveau poste de garde et ainsi de suite. On dénote X_n son poste après n événements.

1. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov. Donner sa matrice de transition et le graphe associé.
2. Déterminer les classes d'équivalence ainsi que leur période.
3. La chaîne est-elle récurrente ? transiente ?

Exercice 2. Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

1. Former, à partir de cela, une chaîne de Markov et en déterminer sa matrice de transition
2. Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain ?
3. Si on suppose que l'on a que deux états (beau temps et mauvais temps), déterminer la matrice de transition de la nouvelle chaîne ainsi obtenue.
4. Dans ce cas, donner la matrice de transition à n pas.

Exercice 3. On dispose de 2 machines identiques fonctionnant indépendamment et pouvant tomber en panne au cours d'une journée avec la probabilité $q = \frac{1}{4}$. On note X_n le nombre de machines en panne au début de la n -ième journée.

1. On suppose que, si une machine est tombée en panne un jour, elle est réparée la nuit suivante et qu'on ne peut réparer qu'une machine dans la nuit. Montrer que l'on peut définir ainsi une chaîne de Markov dont on déterminera le graphe, la matrice de transition.
2. Donner une distribution stationnaire de X
3. Mêmes questions en supposant qu'une machine en panne n'est réparée que le lendemain, le réparateur ne pouvant toujours réparer qu'une machine dans la journée.
4. Le réparateur, de plus en plus paresseux, met maintenant 2 jours pour réparer une seule machine. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ n'est plus une chaîne de Markov, mais que l'on peut construire un espace de 5 états permettant de décrire le processus par une chaîne de Markov dont on donnera le graphe des transitions. Calculer la probabilité que les 2 machines fonctionnent après n jours pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$ si elles fonctionnent initialement.

Exercice 4. On considère la chaîne de Markov suivante

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Dessiner le graphe de la chaîne.
2. Y-a-t-il un état absorbant, si oui lequel et pourquoi ?
3. En conditionnant sur le premier pas calculer les temps moyens pour la chaîne d'être absorbé par l'état absorbant en commençant par chacun des deux autres états.

Exercice 5. On considère la chaîne de Markov X sur deux états $0, 1$ dont la matrice de transition P est donnée par

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

avec $0 < p, q < 1$.

1. Classifier les états de la chaîne.
2. Déterminer la probabilité stationnaire.



Oskar Perron
(1880–1975)



Ferdinand Georg Frobenius
(1849–1917)

