

Feuille d'Exercices III

Processus Stochastiques

Exercice 1. On considère la chaîne de Markov de matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Dessiner le graphe de la chaîne.
2. Donner les classes de la chaîne et dites si elles sont fermées et donner leur période.

Exercice 2. On considère le jeu suivant: On pose une question à un joueur, avec probabilité $p \in (0, 1)$, il donne la bonne réponse et gagne \$1 dollar, avec probabilité $1 - p$, il donne la mauvaise réponse et perd toute sa fortune. On suppose que les questions (et les réponses) sont toutes indépendantes entre elles. On dénote X_n sa fortune au temps n et on suppose que $X_0 = 0$.

1. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov, dessiner son graphe et donner sa matrice de transition.
2. Montrer que c'est une chaîne irréductible.
3. Soit $T_0 = \min_{n \geq 1, X_n = 0}$. Calculer $\mathbb{P}(T_0 = n | X_0 = 0)$.
4. En déduire que 0 est un état récurrent. Que dire des autres états?

Exercice 3. On définit la fonction de Green $G(x, y) = \mathbb{E}[\text{nombre de visites en } y | X_0 = x] = \sum_{n=0}^{\infty} P_{xy}^{(n)}$.

1. Montrer que si $x \nrightarrow y$, alors $G(x, y) = 0$.
2. Montrer que si $x \rightarrow y$ et y est transient alors $G(x, y) < \infty$, y est récurrent alors $G(x, y) = \infty$.
3. Montrer que la fonction de Green satisfait: $G = PG + \text{Id}$.
4. Prenons la chaîne de Markov

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Dessiner le graphe de la chaîne et classifier les états.

5. Calculer la fonction de Green, en déduire la probabilité de ne jamais revenir en 3 sachant que l'on est parti de 3.

Exercice 4. Soit $X = (X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P . Montrer que X est une chaîne de Markov irréductible si et seulement si il n'existe pas de sous-ensemble strict non vide $A \subset S$ tel que

$$\forall x \in A, \forall y \in S \setminus A, P(x, y) = 0.$$



George Green
(1793–1841)




René Maurice Fréchet
(1878–1973)
