

Feuille d'Exercices II

Processus Stochastiques

Exercice 1. On considère la marche aléatoire simple S_n .

1. Montrer la formule

$$\mathbb{P}(S_{2k} = 0 \mid S_0 = 0) = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k}$$

2. En utilisant la formule de Stirling sur la formule dessus, montrer que $\mathbb{E}[N_n] \rightarrow \infty$ où N_n est le nombre de visites en zéro par S_k pour $k \leq n$.
3. Le but de la question est de montrer que la marche aléatoire symétrique est *récurrente* i.e.

$$\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ pour un nombre infini de } n) = 1$$

- a. On considère $N = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{1}_{S_m=0}$. Montrer que $\mathbb{E}[N] = \infty$.
- b. Montrer que $\mathbb{E}[N] = \frac{r}{1-r}$ avec

$$r = \mathbb{P}(S_n = 0 \text{ pour un } n \geq 1 \mid S_0 = 0).$$

- c. En déduire que la marche aléatoire est récurrente.

Exercice 2. On considère la marche aléatoire symétrique commençant en 0. On définit

N_k = nombre de fois où on a atteint k avant de retourner en 0.

1. Montrer que $\mathbb{P}(N_k > 0) = \frac{1}{2k}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(N_k > j+1 \mid N_k > j) = \frac{1}{2} + \frac{k-1}{2k}$.
3. En déduire que $\mathbb{E}[N_k] = 1$.

Exercice 3. Indiana Jones cherche un trésor. Il se trouve sur un labyrinthe 3x3 et il se déplace aléatoirement uniformément seulement vers le haut, bas, haut, ou gauche s'il le peut. Il ne peut se déplacer en diagonale. Il s'arrête s'il atteint le trésor ou le piège.

On considère X_n , la position d'Indiana au temps $n \geq 0$ qui est une chaîne de Markov.

Indiana 0	1	Trésor 2
3	4	5
Piège 6	7	8

On veut donc calculer

$$v_i = \mathbb{P}(\text{Indiana atteint le trésor} \mid X_0 = i) = \mathbb{P}(\exists n \geq 0, X_n = 2 \mid X_0 = i.)$$

1. Donner l'espace des états et la matrice de transition en un pas P de la chaîne de Markov X .
2. Calculer v_2 et v_6 .
3. Calculer v_0 , v_4 , et v_8 .
4. En conditionnant à un pas, calculer v_1 , v_3 , v_5 , et v_7 .

Exercice 4. On considère la marche aléatoire simple définie par l'espace des états $\mathbb{Z}$ et les probabilités de transition

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i - 1 | X_n = i) = \frac{1}{2}.$$

On veut calculer la distribution du temps d'atteinte en 1 moyen en commençant en 0,

$$T_{0,1} = \min_{n \geq 0} \{X_n = 1, \text{ avec } X_0 = 0\}. \text{ On définit de même } T_{i,j} = \min_{n \geq 0} \{X_n = j, \text{ avec } X_0 = i\}$$

Pour ce faire nous allons calculer sa fonction génératrice de probabilités $G(s) = \mathbb{E}[s^{T_{0,1}}]$.

1. En conditionnant en un pas, montrer que

$$G(s) = \frac{1}{2} (s + sG(s)^2).$$

2. En déduire que

$$G(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - s^2}}{s}.$$

3. En utilisant $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ avec $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$, montrer que

$$G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k} \frac{s^{2k-1}}{2^{2k}}.$$

4. Calculer la probabilité que la marche devienne strictement positive pour la première fois au temps 5.

Exercice 5. On considère la chaîne de Markov sur 3 états $S = \{0, 1, 2\}$ et comme matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1. Déterminer si les états sont récurrents ou transients pour chaque état.
2. Déterminer la matrice de transition en n pas $P^{(n)}$.
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}$



György Pólya
(1887–1985)



Vsevolod Ivanovich Romanovsky
(1879–1954)

