

Feuille d'Exercices X

Processus Stochastiques

Exercice 1. Un commercial voyage entre Montréal, Québec et Toronto en une année selon une chaîne de Markov en temps continu donnée par

$$Q = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

1. Décrire la chaîne de Markov.
2. Trouver la fraction limite de temps que le commercial passe dans chaque ville.
3. Quel est le nombre moyen de voyages par année de Québec à Montréal.
4. Le commercial vient de partir de Montréal, que est le temps moyen de son retour à Montréal.

Exercice 2. Nous avons un système à deux serveurs: Le message entre dans la file d'attente du premier serveur, quand c'est son tour il est traité en un temps exponentiel de paramètre μ_1 . Il rentre ensuite dans la file d'attente du deuxième serveur et à son tour sera traité en un temps exponentiel de paramètre μ_2 .

On suppose qu'à l'arrivée de notre message, le premier serveur est libre (il n'y a pas de file d'attente), le message A est traité au serveur 2 et le message B est dans la file d'attente au serveur 2.

1. Quelle est la probabilité que A soit toujours en train d'être traité lorsque nous passerons dans la file d'attente du deuxième serveur ?
2. Quelle est la probabilité que B soit toujours dans le système lorsque nous passerons dans la file d'attente du deuxième serveur?
3. Calculer l'espérance du temps passé dans le système.

Exercice 3. On considère une maladie qui peut être modélisée de la façon suivante. On considère 3 états: 1 pour léger, 2 pour moyen et 3 pour grave. Dans l'état 1, on attend une variable exponentielle de paramètre λ_1 avant de passer à l'état 2, de l'état 2 on attends une variable exponentielle de paramètre λ_2 avant de passer à l'état 3.

1. Y a-t-il un état absorbant pour la chaîne ?
2. Construire la Q -matrice de la chaîne, on rappelle qu'un état absorbant n'a qu'une ligne de zéro.
3. Donner l'équation progressive de Kolmogorov pour les probabilités de transitions sans les résoudre.
4. Quel est le temps moyen pour passer de l'état léger à l'état grave ?
5. On considère maintenant qu'il y a un médicament donné aux patients dans l'état 3 qui leur permet après une variable exponentielle de paramètre λ_3 de passer à l'état 2. Construire la nouvelle Q -matrice.
6. Calculer la distribution stationnaire de celle-ci.
7. Quelle est la probabilité limite d'être dans l'état 2?

Exercice 4. Des clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre λ par heure. Thomas ne veut pas resté jusqu'à l'heure de fermeture T il décide alors de fermer le magasin lorsque le premier client après $T - s$ arrive. Il veut partir plus tôt mais ne veut pas perdre de chiffres d'affaires donc il est heureux lorsque personne n'arrive après son départ.

1. Quelle est la probabilité d'atteindre son but ?
2. Quelle est la valeur optimale de s ainsi que la probabilité correspondante de succès.

Exercice 5. Un scientifique a une machine qui collecte des données. Aux temps d'un processus de Poisson de paramètre 1, la machine est dérangé par son environnement. Le scientifique vient tous les L unités de temps pour vérifier son équipement, s'il est dérangé, il peut la réparer immédiatement.

1. Quelle est la fraction limite de temps où la machine fonctionne ?
2. On suppose que les données collectées ont une valeur de a dollars par unité de temps et chaque inspection coûte $c < a$. Trouver la meilleur valeur de L pour optimiser le rendement. On montrera que L doit vérifier une équation qu'on ne résoudra pas.