

Feuille d'Exercices I

Processus Stochastiques

Exercice 1. Dans les exemples suivants, expliquer si c'est une chaîne de Markov. On donnera son espace des états ainsi que sa matrice de transition si c'en est une. On lance une pièce de monnaie à répétition.

1. Soit W_i le résultat du i -ème lancer. On considère $W = \{W_i\}_{i \geq 0}$.
2. Soit X_i le nombre de lancers depuis la dernière fois qu'on a obtenu Pile après i lancers. On considère $X = \{X_i\}_{i \geq 0}$, par exemple

PFFFFPPFP $\longrightarrow$ 01230010.

3. Soit Y_i le nombre de lancers restants avant d'obtenir Pile de nouveau après i lancers (en incluant le lancer où on obtient Pile). On considère $Y = \{Y_i\}_{i \geq 0}$, par exemple

FFFFPPFPFP $\longrightarrow$ 4321321121.

4. Soient $\ell \in \mathbb{N}$ et Z_i le nombre de fois qu'on a obtenu Pile entre le i -ème et $i + \ell$ -ème lancers. On considère $Z = \{Z_i\}_{i \geq 0}$, par exemple pour $\ell = 2$,

PPFFFFPPFP $\longrightarrow$ 21012322.

Exercice 2. Soient $(Y_n)_{n \geq 0}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans S et f une fonction de $S \times S$ dans S . On pose

$$\begin{cases} X_0 = Y_0, \\ X_{n+1} = f(X_n, Y_{n+1}). \end{cases}$$

Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov.

Exercice 3. Un bit informatique (que l'on modélise par ± 1) passe à travers n intermédiaires. Avec probabilité p , un intermédiaire passe correctement le bit; avec probabilité $1 - p$, un intermédiaire le change en son contraire. Le premier bit est modélisé par une variable aléatoire X_0 qui est indépendante des intermédiaires.

1. Modéliser ce problème par un processus stochastique $(X_n)_{n \geq 0}$ et montrer qu'il s'agit d'une chaîne de Markov.
Indication : On pourra utiliser l'exercice précédent.
2. Donner sa matrice de transition.
3. Calculer la probabilité que le bit avant la $(n + 1)$ -ième transmission soit le même que le bit initial.
4. Que se passe-t-il lorsque $n \rightarrow \infty$?

Exercice 4. Un joueur fréquente 3 casinos numérotés 1, 2 et 3. Chaque jour il choisit l'un des deux casinos où il n'est pas allé la veille suivant une même probabilité $\frac{1}{2}$. Le premier jour, jour 0, il choisit l'un des trois casinos selon une loi μ_0 sur $S = \{1, 2, 3\}$. On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du casino fréquenté par le joueur le jour n . On admet que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov.

1. Déterminer la matrice de transition P .
2. Vérifier que l'on a $P = \frac{1}{2}(J_3 - I_3)$ avec

$$J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Calculer alors les puissances P^n et en déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$.

4. Calculer les $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = x)$ pour $x \in \{1, 2, 3\}$.

Exercice 5. On considère $(\xi_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables i.i.d telles que $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = \mathbb{P}(\xi_n = -1) = \frac{1}{2}$ et on définit $X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ avec $X_0 = 0$ (X est appelée la marche aléatoire symétrique).

1. Montrer que X est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.

2. On pose $M_n = \max_{0 \leq k \leq n} X_k$. Montrer que M n'est pas une chaîne de Markov.

3. On considère $Y_n = (X_n, M_n - X_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Montrer que

$$Y_{n+1} - Y_n = \begin{cases} (\xi_{n+1}, -\xi_{n+1}) & \text{si } M_n - X_n > 0, \\ (1, 0) & \text{si } M_n - X_n = 0 \text{ et } \xi_{n+1} = 1, \\ (-1, 1) & \text{si } M_n - X_n = 0 \text{ et } \xi_{n+1} = -1. \end{cases}$$

4. En déduire par l'**Exercice 2.** que Y_n est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

5. Montrer que $(M_n - X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.



Andrey Andreyevich Markov
(1856–1922)



Sydney Chapman
(1888–1970)



Andrey Nikolaevich Kolmogorov
(1903–1987)

