
0. TABLE DES MATIÈRES

1	Chaînes de Markov en temps discret	1
1.1	Premières définitions	1
1.2	Conditionnement à un pas	7
1.3	Classification des états	9
1.4	Distribution stationnaire	15
2	Chaînes de Markov en temps continu	24
2.1	Construction des chaînes de Markov en temps continu	25
2.2	Processus de Poisson	29
2.3	Processus de Poisson composés	33
2.4	Processus de naissance de Yule	35
2.5	Comportement limite	36
3	Processus de renouvellement	41
3.1	Définition et théorèmes limites	41
3.2	Âge et temps de vie résiduel	45
3.3	Processus semi-markoviens	47
4	Introduction à la théorie des martingales	48
4.1	Espérance conditionnelle	48
4.2	Définition des martingales	49
4.3	Sous-martingales et sur-martingales	52

1. CHÂÎNES DE MARKOV EN TEMPS DISCRET

1.1 Premières définitions

On commence par définir un processus stochastique de manière générale.

DÉFINITION 1.1

Un processus stochastique est une famille de variable aléatoires à valeurs dans un même espace S :

$$\{X_t : \Omega \rightarrow S\}_{t \in I}.$$

S est appelé l'espace des états du processus. Lorsque I est dénombrable, on parle de processus en temps discret.

Dans ce chapitre, et pour parler de *chaînes*, nous nous concentrerons sur S étant fini ou infini dénombrable.

Par exemple, Si $X_1, \dots$ sont des variables aléatoires indépendants alors le $\{X_n\}_{n \geq 1}$ est un processus stochastique. Par exemple, X_i peut correspondre au résultat d'une pièce $X_i \in \{P, F\}$. Un exemple plus intéressant vient lorsqu'il y a dépendance entre les éléments du processus.

Pour ce faire prenons un nouvel exemple, un jeu de pari où à chaque mise : on gagne \$1 avec probabilité 0,4, on perd \$1 avec probabilité 0,6.

On arrête alors de jouer lorsqu'on a atteint soit \$N\$ ou \$0\$ où \$N\$ est une cible fixée à l'avance. On considère alors le processus suivant

X_n : fortune au temps n .

Nous pouvons alors calculer certaines probabilités, par exemple pour $i_n \in \{1, \dots, N-1\}$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \begin{cases} 0,4 & \text{si } j = i_n + 1, \\ 0,6 & \text{si } j = i_n - 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $i_n = 0$ alors nous avons

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = 0, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = 0) = \mathbb{1}_{j=0} = \mathbb{1}_{j=i_n}$$

et de même si $i_n = N$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = N, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = 0) = \mathbb{1}_{j=N} = \mathbb{1}_{j=i_n}.$$

Dans ce calcul, on remarque quelque chose d'important : l'état futur X_{n+1} ne dépend que du présent $i_n = X_n$ mais pas du passé $(X_{n-1}, \dots, X_0)$. On dit que ce processus est de Markov ou markovien. C'est notre premier exemple de chaîne de Markov.

DÉFINITION 1.2

Une chaîne de Markov à temps discret est une suite de variables aléatoires $\{X_n : \Omega \rightarrow S\}$ à valeurs dans un même espace d'états S telle que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n).$$

On appelle cette probabilité la probabilité de transition de i_n vers i_{n+1} .

OBSERVATION . Lorsque les probabilités de transition ne dépendent pas du temps n , on dit que la chaîne est homogène. On restera dans ce cas là dans ces notes.

On voit que

$$P_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

donnent les règles complètes de notre jeu. En réécrivant nos probabilités calculées précédemment,

$$P_{00} = 1, \quad P_{NN} = 1, \quad P_{i,i+1} = 0,4, \quad P_{i,i-1} = 0,6 \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, N-1\}.$$

On peut alors écrire cela sous forme d'une matrice, par exemple si $N = 3$,

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Cette matrice est appelée la matrice de transition en un pas de la chaîne de Markov.

DÉFINITION 1.3

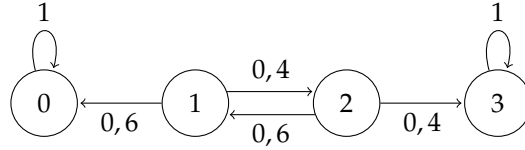
Soit $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov. On définit la matrice de transition en un pas P de X par

$$P_{i,j} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

On note que si l'espace des états est infini dénombrable alors nous n'avons pas une "matrices" à propre-

ment parlé mais on utiliserons tout de même ce terme.

On peut aussi représenter la chaîne de Markov sous forme graphique, en prenant l'exemple de la ruine du joueur avec $N = 3$.



EXEMPLE 1. On considère la chaîne d'Ehrenfest : m particules d'un gaz sont divisées entre deux compartiments fermés A et B avec un trou entre la cloison des deux compartiments. À chaque instant, un seul passage entre compartiment ne peut se produire et chaque particule a une chance égale à toute autre de changer de compartiments. On définit alors X_n le nombre de particules dans le compartiment A après n passages. L'espace des états de la chaîne est donc $S = \{0, \dots, m\}$.

Est-elle une chaîne de Markov ? Pour connaître X_{n+1} , devons-nous ne savoir que X_n ? Vérifions-le :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \frac{m - i}{m}.$$

De même,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i - 1 | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \frac{i}{m}.$$

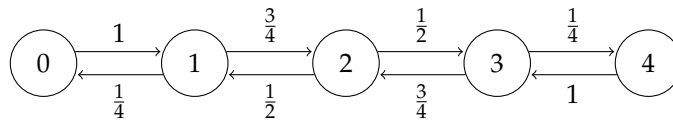
On remarque donc que cela ne dépend que de i et donc seulement que de X_n . On peut écrire cela sous forme de matrice de transition, on a

$$P_{i,i+1} = \frac{m - i}{m}, \quad P_{i,i-1} = \frac{i}{m}$$

qui donne par exemple pour $m = 4$,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Et sous forme de graphe



Dans ces deux exemples, on a défini la matrice de transition depuis la définition de la chaîne. En fait, toute matrice de transition définit une chaîne

DÉFINITION 1.4

Une matrice de transition $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ est une matrice dont les coefficients suivent

- $P_{ij} \geq 0$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$.
- $\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

La matrice de transition et la distribution de la condition initiale X_0 déterminent complètement la chaîne. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) &= \mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \mathbb{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ &= \mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) \mathbb{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P_{i_{n-1}, i_n} \mathbb{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\
&= P_{i_{n-1}, i_n} P_{i_{n-2}, i_{n-1}} \dots P_{i_0, i_1} \mathbb{P}(X_0 = i_0).
\end{aligned}$$

DÉFINITION 1.5: Matrice de transition en n pas

Soit $X = \{X_n\}_n$ une chaîne de Markov. ON définit la matrice de transition en n pas P de X par

$$P_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i)$$

On remarque que l'on a aussi

$$P_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_{n+k} = j | X_k = i)$$

et aussi

$$0 \leq P_{ij}^{(n)} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^m P_{ij}^{(n)} = 1.$$

THÉORÈME 1.6: Équation de Chapman-Kolmogorov

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{\ell \in S} P_{i\ell}^{(k)} P_{\ell j}^{(n-k)} \quad \text{que l'on peut écrire} \quad P^{(n)} = P^{(k)} P^{(n-k)}.$$

En particulier,

$$P^{(n)} = P^n.$$

Démonstration. L'idée de la preuve est de conditionner à un instant intermédiaire. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on a

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \sum_{\ell=1}^m \mathbb{P}(X_n = j, X_k = \ell | X_0 = i) = \sum_{\ell=1}^m \mathbb{P}(X_n = j | X_k = \ell, X_0 = i) \mathbb{P}(X_k = \ell | X_0 = i).$$

On utilise maintenant la propriété de Markov et la définition de la matrice de transition en k pas et on a

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{\ell=1}^m \mathbb{P}(X_n = j | X_k = \ell) P_{i\ell}^{(k)} = \sum_{\ell=1}^m \mathbb{P}(X_{n-k} = j | X_0 = \ell) P_{i\ell}^{(k)} = \sum_{\ell=0}^m P_{\ell j}^{(n-k)} P_{i\ell}^{(k)}.$$

On reconnaît ainsi un produit de matrices que l'on peut réécrire

$$P^{(n)} = P^{(k)} P^{(n-k)}.$$

Et par récurrence, puisque $P^{(1)} = P$ par définition, on a que si $P^{(n-1)} = P^{n-1}$ alors

$$P^{(n)} = P^{(n-1)} P^{(1)} = P^{n-1} P = P^n.$$

□

EXEMPLE 2. On rappelle la matrice de transition de la ruine du joueur avec $N = 3$,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On peut alors calculer facilement la matrice de transition à deux pas,

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{6}{25} & 0 & \frac{4}{25} \\ \frac{9}{25} & 0 & \frac{6}{25} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On peut continuer, si on calcule la matrices après 20 tirages, on obtient

$$P^{20} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.79 & 6 \times 10^{-7} & 0 & 0.21 \\ 0.47 & 0 & 6 \times 10^{-7} & 0.53 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On remarque donc qu'il n'y a que très peu de chance de continuer à jouer après 20 tirages! En fait, on verra plus tard même

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{15}{19} & 0 & 0 & \frac{4}{19} \\ \frac{9}{19} & 0 & 0 & \frac{10}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EXEMPLE 3. Regardons un exemples plus simple à deux états. Supposons que le temps qu'il fasse demain de dépende qu'aujourd'hui. On considère deux états ☀ and ☁ end définissant

☀_n : Il fait beau au jour n,

☁_n : Il fait nuage au jour n.

On se donne les données suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{☀}_{n+1} | \text{☀}_n) &= 0.8, & \mathbb{P}(\text{☁}_{n+1} | \text{☀}_n) &= 0.2, \\ \mathbb{P}(\text{☀}_{n+1} | \text{☁}_n) &= 0.4, & \mathbb{P}(\text{☁}_{n+1} | \text{☁}_n) &= 0.6. \end{aligned}$$

On définit la variable aléatoire $X_n = 1_{\text{☁}_n}$ et on voit que X_n est une chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{0, 1\}$ avec la matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

On est Mercredi et il fait beau, calculons la probabilité qu'il fasse beau Dimanche. On cherche donc

$$\mathbb{P}(X_4 = 0 | X_0 = 0) = P_{0,0}^4$$

et le calcul donne

$$P^2 = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 18 & 7 \\ 14 & 11 \end{bmatrix}, \quad P^4 = P^2 P^2 = \frac{1}{625} \begin{bmatrix} 422 & 203 \\ 406 & 219 \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_4 = 0 | X_0 = 0) = \frac{422}{625} = 0.6752$$

On peut généraliser le calcul que l'on vient de faire au cas général des chaînes à deux états. On considère la matrice de transition générale pour $0 \leq a, b \leq 1$,

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}.$$

Pour calculer P^n , on va diagonaliser P . En effet, on rappelle que si on peut écrire

$$P = U\Lambda U^{-1} \quad \text{alors} \quad P^n = U\Lambda^n U^{-1}.$$

On calcule donc les valeurs propres de P ,

$$\det(P - \lambda I) = (1 - a - \lambda)(1 - b - \lambda) - ab = \lambda^2 - (2 - a - b)\lambda + (1 - a - b) = 0.$$

On calcule le discriminant

$$\Delta = (2 - a - b)^2 - 4(1 - a - b) = (a + b)^2$$

qui nous donne les deux valeurs propres

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1 - (a + b).$$

On cherche maintenant les vecteurs propres associés. Pour $\lambda_1 = 1$, on résout

$$(P - I)\vec{u} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -a & a \\ b & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

qui nous donne $u_2 = u_1$. On peut donc prendre $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Pour $\lambda_2 = 1 - (a + b)$, on résout

$$(P - \lambda_2 I)\vec{v} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

qui nous donne $av_2 = -bv_1$. On peut donc prendre $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}$. On peut alors écrire

$$U = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - (a + b) \end{bmatrix}, \quad U^{-1} = \frac{1}{a + b} \begin{bmatrix} b & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Finalement,

$$P = \frac{1}{a + b} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - (a + b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

qui nous donne

$$P^n = \frac{1}{a + b} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 - (a + b))^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Si la chaîne n'est pas triviale, i.e $a + b \neq 2$ et $a + b \neq 0$, on peut alors calculer la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \frac{1}{a + b} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{a + b} \begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Les lignes de P deviennent identiques lorsque n devient grand. Plus le temps s'écoule, plus la chaîne oublie son état initial. On remarque aussi que ces lignes limites sont particulières pour P car on a

$$\frac{1}{a + b} \begin{bmatrix} b & a \end{bmatrix} P = \frac{1}{a + b} \begin{bmatrix} b & a \end{bmatrix} \frac{1 - a}{b} \frac{a}{1 - b} = \frac{1}{a + b} \begin{bmatrix} b & a \end{bmatrix}.$$

C'est un vecteur propre à gauche associé à la valeur propre 1. On verra plus tard que ce vecteur a une signification importante. On remarque qu'il n'y a pas toujours une limite, par exemple si $a = b = 1$, alors

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et ceci nous donne} \quad P^n = \begin{cases} I & \text{si } n \text{ est pair,} \\ P & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

et il n'y a pas de limite lorsque $n \rightarrow \infty$.

1.2 Conditionnement à un pas

Reprenons l'exemple de la ruine du joueur. On définit X_n la fortune du joueur au temps n et on rappelle les transitions

$$P_{n,n-1} = p, \quad P_{n,n+1} = p \quad \text{pour tout } 1 \leq n \leq N_1 \quad \text{et} \quad P_{0,0} = P_{N,N} = 1.$$

Calculons la probabilité de ruine, c'est-à-dire

$$u_i := \mathbb{P}(R | X_0 = i) \quad \text{avec} \quad R = \{\exists n \geq 0, X_n = 0\}.$$

On connaît déjà plusieurs valeurs car $u_0 = 1$ et $u_N = 0$. On va obtenir une formule de récurrence en conditionnant sur le premier pas. En effet pour $1 \leq i \leq N-1$,

$$\begin{aligned} u_i &= \mathbb{P}(R | X_0 = i) \\ &= \mathbb{P}(R | X_0 = i, X_1 = i+1) \mathbb{P}(X_1 = i+1 | X_0 = i) + \mathbb{P}(R | X_0 = i, X_1 = i-1) \mathbb{P}(X_1 = i-1 | X_0 = i) \\ &= \mathbb{P}(R | X_1 = i+1) p + \mathbb{P}(R | X_1 = i-1) (1-p) \\ &= p u_{i+1} + q u_{i-1} \end{aligned}$$

avec la notation $q := 1 - p$. Maintenant, on peut réécrire cette relation de récurrence sous la forme

$$u_i = p u_{i+1} + q u_{i-1} \iff u_{i+1} - u_i = \frac{q}{p} (u_i - u_{i-1}).$$

Ceci nous donne ainsi que

$$u_{i+1} - u_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i (u_1 - u_0)$$

et finalement

$$u_k = \sum_{i=0}^{k-1} (u_{i+1} - u_i) + u_0 = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i (u_1 - u_0) + u_0.$$

On utilise maintenant le fait que $u_0 = 1$ et que $u_N = 0$ pour obtenir u_1 car

$$u_N = 0 = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i (u_1 - 1) + 1 \iff u_1 = 1 - \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i}.$$

Finalement, on obtient

$$u_k = 1 - \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i}{\sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i}.$$

En calculant la somme d'une série géométrique,

$$\sum_{i=0}^{k-1} r^i = \begin{cases} k & \text{si } r = 1, \\ \frac{1-r^k}{1-r} & \text{si } r \neq 1, \end{cases}$$

on obtient le résultat final, comme $\frac{q}{p} = 1$ est équivalent à $p = \frac{1}{2}$,

$$u_k = \begin{cases} 1 - \frac{k}{N} & \text{si } p = \frac{1}{2}, \\ 1 - \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} & \text{si } p \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

On remarque ainsi que si $N \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que le joueur n'a pas de limite de fortune, on obtient

$$u_k = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leq \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{q}{p}\right)^k & \text{si } p > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Si le jeu est en notre faveur, on a une probabilité strictement positive de ne jamais être ruiné! On peut aussi utiliser le conditionnement à un pas pour déterminer la durée moyenne d'une partie de jeu. Pour simplifier les calculs, on considère le cas où $p = \frac{1}{2}$. On définit

$$v_i = \mathbb{E} [\text{Durée d'un jeu} | X_0 = i] = \mathbb{E} \left[\min_{n \in \mathbb{N}} \{X_n = 0 \text{ ou } X_n = N\} | X_0 = i \right].$$

En particulier, $v_0 = v_N = 0$. On utilise le même raisonnement que précédemment en conditionnant à un pas. Pour $1 \leq i \leq N-1$, on obtient

$$v_i = \frac{1}{2}v_{i-1} + \frac{1}{2}v_{i+1} + 1.$$

Il ne faut pas oublier le +1 car on compte le pas effectué. On réécrit cette relation de récurrence sous la forme

$$v_{i+1} - v_i = v_i - v_{i-1} - 2 \implies v_{i+1} - v_i = (v_1 - v_0) - 2i = v_1 - 2i.$$

Ainsi

$$v_k = \sum_{i=0}^{k-1} (v_{i+1} - v_i) + v_0 = \sum_{i=0}^{k-1} (v_1 - 2i) = kv_1 - k(k-1).$$

Pour trouver v_1 , on utilise la condition $v_N = 0$,

$$0 = v_N = Nv_1 - N(N-1) \implies v_1 = N-1.$$

Finalement, on obtient

$$v_k = k(N-1) - k(k-1) = k(N-k).$$

La symétrie entre k et $N-k$ est logique car le jeu est équitable. On remarque que la durée moyenne est maximale lorsque $k = \frac{N}{2}$, c'est-à-dire lorsque le joueur commence avec la moitié de la fortune totale. On remarque aussi que $v_k < +\infty$ pour tout $1 \leq k \leq N-1$. Le temps moyen est toujours fini!

EXEMPLE 4. On lance une pièce jusqu'à obtenir FFF. Calculons le nombre moyen de lancers pour obtenir ce motif. On va construire une chaîne de markov adaptée. On définit les états suivants :

$$S = \{XXP, XPF, PFF, FFF\}$$

dont on garde l'ordre pour construire la matrice de transition. On a alors

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On remarque que l'état FFF est absorbant car on arrête le jeu une fois qu'on a eu ce lancer. On définit

$$\tau_i = \mathbb{E} \left[\text{Nombre de lancers supplémentaires pour atteindre FFF} \middle| \text{État } i \right].$$

On a bien sur $\tau_{\text{FFF}} = 0$. En conditionnant à un pas, on obtient les relations de récurrence

$$\begin{aligned} \tau_{\text{XXP}} &= \frac{1}{2} \tau_{\text{XXP}} + \frac{1}{2} \tau_{\text{XPF}} + 1, \\ \tau_{\text{XPF}} &= \frac{1}{2} \tau_{\text{XXP}} + \frac{1}{2} \tau_{\text{PFF}} + 1, \\ \tau_{\text{PFF}} &= \frac{1}{2} \tau_{\text{XXP}} + \frac{1}{2} \tau_{\text{FFF}} + 1. \end{aligned}$$

On peut résoudre facilement ce système linéaire et on trouve

$$\tau_{\text{XXP}} = 14, \quad \tau_{\text{XPF}} = 12, \quad \tau_{\text{PFF}} = 8.$$

Si on part du premier lancer, on regarde donc $\tau_{\text{XXP}} = 14$. En moyenne, il faut donc 14 lancers pour obtenir FFF. Si on n'aurait pas que l'on doit choisir τ_{XXP} , on peut aussi conditionner sur les trois premiers lancers et on a

$$\tau = 3 + \frac{1}{2} \tau_{\text{XXP}} + \frac{1}{4} \tau_{\text{XPF}} + \frac{1}{8} \tau_{\text{PFF}} + \frac{1}{8} \tau_{\text{FFF}} = 14$$

où on a utilisé

$$\mathbb{P}(\text{XXP}) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(\text{XPF}) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(\text{PFF}) = \mathbb{P}(\text{FFF}) = \frac{1}{8}.$$

Que se passe-t-il si on regarde le motif PFF? On construit la chaîne de Markov avec les états

$$S = \{\text{XXP}, \text{XPF}, \text{PFF}, \text{FFF}\}$$

et la même matrice de transition que précédemment. On définit

$$\tau'_i = \mathbb{E} \left[\text{Nombre de lancers supplémentaires pour atteindre PFF} \middle| \text{État } i \right].$$

On a bien sur $\tau'_{\text{PFF}} = 0$. En conditionnant à un pas, on obtient les relations de récurrence

$$\begin{aligned} \tau'_{\text{XXP}} &= \frac{1}{2} \tau'_{\text{XXP}} + \frac{1}{2} \tau'_{\text{XPF}} + 1, \\ \tau'_{\text{XPF}} &= \frac{1}{2} \tau'_{\text{XXP}} + \frac{1}{2} \tau'_{\text{PFF}} + 1, \\ \tau'_{\text{FFF}} &= \frac{1}{2} \tau'_{\text{XXP}} + \frac{1}{2} \tau'_{\text{PFF}} + 1. \end{aligned}$$

On peut résoudre facilement ce système linéaire et on trouve

$$\tau'_{\text{XXP}} = 6, \quad \tau'_{\text{XPF}} = 4, \quad \tau'_{\text{FFF}} = 8.$$

En partant du premier lancer, on regarde donc $\tau'_{\text{FFF}} = 8$ ou en conditionnant sur les 3 premiers lancers,

$$\tau' = 3 + \frac{1}{8} \tau'_{\text{FFF}} + \frac{1}{2} \tau'_{\text{XXP}} + \frac{1}{4} \tau'_{\text{XPF}} + \frac{1}{8} \tau'_{\text{PFF}} = 8.$$

On voit donc que l'on met moins de temps en moyenne pour obtenir le motif PFF que le motif FFF. Les répétitions dans le motif allongent le temps moyen pour obtenir ce motif. On pourra faire le même raisonnement pour le motif PFP et on obtient un nombre moyen de lancers égal à 10.

1.3 Classification des états

Nous allons maintenant donner plusieurs définitions et propriétés pour classer les états d'une chaîne de Markov.

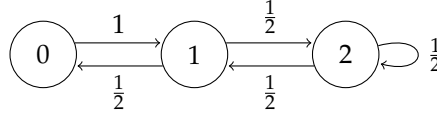
DÉFINITION 1.7: États récurrents et transients

Un état i est *récurrent* pour une chaîne de Markov X si

$$f_{ii} := \mathbb{P}(\text{retour en } i | \text{départ de } i) = \mathbb{P}(\exists n \geq 1, X_n = i | X_0 = i) = 1.$$

S'il n'est pas récurrent, il est dit *transient*, i.e $f_{ii} < 1$.

EXEMPLE 5. Regardons la chaîne de Markov décrit par le graphe suivant



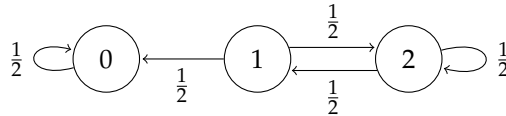
L'état 2 est-il récurrent ou transient ? On commence par écrire

$$f_{22} = \mathbb{P}(\exists n \geq 1, X_n = 2 | X_0 = 2) = 1 - \mathbb{P}(\forall n \geq 1, X_n \neq 2 | X_0 = 2).$$

Or, pour ne pas revenir en 2, il faut à chaque fois aller en 1 puis en 0 et rester entre ces deux états. Ainsi,

$$\mathbb{P}(\forall n \geq 1, X_n \neq 2 | X_0 = 2) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \times 1 \right) = 0.$$

On en déduit que $f_{22} = 1$ et donc que l'état 2 est récurrent. Si on prend maintenant la chaîne de Markov suivante



alors on voit que maintenant

$$f_{22} = 1 - \mathbb{P}(\forall n \geq 1, X_n \neq 2 | X_0 = 2) \leq 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} < 1$$

puisque pour ne pas revenir en 2, on peut aller en 1 puis en 0 et rester en 0. Ainsi, l'état 2 est transient dans cette chaîne de Markov.

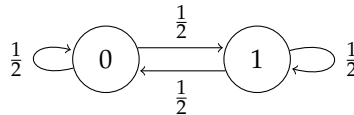
DÉFINITION 1.8: États récurrent nuls

Un état récurrent est dit *récurrent nul* si

$$\mu_i := \mathbb{E} \left[\min_{n \geq 1} X_n = i | X_0 = i \right] = +\infty.$$

Si $\mu_i < +\infty$, il est dit *récurrent positif*.

EXEMPLE 6. Si on considère la chaîne de Markov à deux états suivantes



alors par le même raisonnement que précédent, on trouve que les deux états sont récurrents. Calculons maintenant μ_0 . On a

$$\mathbb{P}(X_n = 0 | X_0 = 0) = \frac{1}{2^n}$$

car pour revenir en 0, il faut à chaque fois rester en 0. Ainsi,

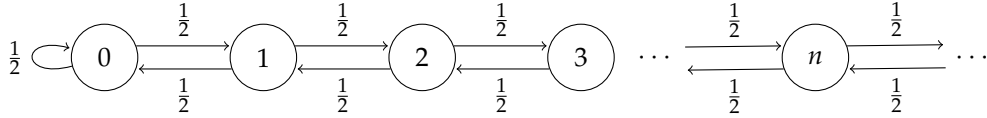
$$\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n \times \frac{1}{2^n} = 2 < +\infty$$

où on a utilisé le fait que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right) \Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} \frac{x}{1-x} \right) \Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(1-x)^2} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = 2.$$

Ainsi l'état 0 est récurrent positif. Par symétrie, l'état 1 est aussi récurrent positif.

Si on considère maintenant une forme de la ruine du joueur donnée par la chaîne de Markov suivante,



alors on a vu que $f_{00} = 1$, i.e l'état 0 est récurrent. Calculons maintenant μ_0 en utilisant le conditionnement à un pas. On a

$$\mu_0 = 1 + \frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mathbb{E} \left[\min_{n \geq 1} \{X_n = 0\} \mid X_1 = 1 \right]$$

que l'on peut réécrire en utilisant la stationarité de la chaîne,

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 2 + \mathbb{E} \left[\min_{n \geq 0} \{X_n = 0\} \mid X_0 = 1 \right] \\ &\geq 2 + \mathbb{E} \left[\min_{n \geq 0} \{X_n = 0 \text{ ou } X_n = N\} \mid X_0 = 1 \right] \\ &= 2 + v_1 = 2 + 1 \times (N - 1) = N + 1. \end{aligned}$$

Mais ceci est vrai pour tout $N \geq 1$, en prenant $N \rightarrow \infty$, on trouve que $\mu_0 = +\infty$. Ainsi, l'état 0 est récurrent nul.

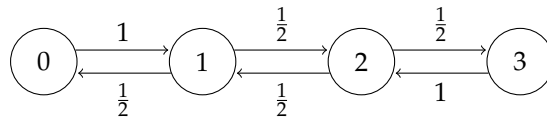
DÉFINITION 1.9: Période d'un état

La période d'un état i est donnée par

$$d(i) = \text{pgcd} \{n \geq 1, P_{ii}^{(n)} > 0\}$$

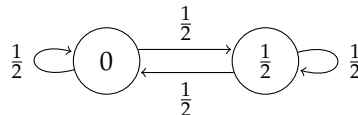
avec $d(i) = 0$ pour $\text{pgcd} \emptyset$. Un état i est dit *périodique* si $d(i) > 1$ et *apériodique* sinon.

EXEMPLE 7. Considérons la chaîne de Markov suivante



On remarque que l'on ne peut pas revenir en 2 avec un nombre impair de pas, ainsi $d(2) = 2$ et l'état est donc périodique.

Si on considère la chaîne de Markov suivante



alors on peut revenir en 1 avec un nombre pair ou impair de pas, ainsi $d(1) = 1$ et l'état est apériodique.

DÉFINITION 1.10

Un état récurrent positif apériodique est dit *ergodique*.

On ne peut pas toujours faire ces classifications à la main, nous allons maintenant voir des critères pour classer les états.

THÉOREME 1.11: Critères de classification

Un état i est récurrent si et seulement si $\sum_{n \geq 1} P_{ii}^{(n)} = +\infty$.

Démonstration. On commence par écrire

$$\sum_{n \geq 1} P_{ii}^{(n)} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n = i | X_0 = i) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_n=i} | X_0 = i] = \mathbb{E}[N_i | X_0 = i]$$

où on a défini $N_i = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{X_n=i}$ le nombre de retours en i après le temps 0. On utilise maintenant le fait que $\mathbb{E}[N_i | X_0 = i] = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(N_i \geq k | X_0 = i)$ et on écrit à l'aide de la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_i \geq k | X_0 = i) &= \sum_{\ell \geq 1} \mathbb{P}(N_i \geq k | X_0 = i, X_1 \neq i, X_2 \neq i, \dots, X_\ell = i) \mathbb{P}(X_1 \neq i, X_2 \neq i, \dots, X_\ell = i) \\ &= \sum_{\ell \geq 1} \mathbb{P}\left(\sum_{j=\ell+1}^{+\infty} \mathbb{1}_{X_j=i} \geq k-1 \mid X_\ell = i\right) f_{ii}^{(\ell)} \end{aligned}$$

où on a défini $f_{ii}^{(\ell)} = \mathbb{P}(X_1 \neq i, X_2 \neq i, \dots, X_\ell = i)$ et on a utilisé la propriété de Markov pour obtenir la dernière égalité. On remarque que par stationarité, on obtient alors

$$\mathbb{P}(N_i \geq k | X_0 = i) = \sum_{\ell \geq 1} \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{X_j=i} \geq k-1 \mid X_0 = i\right) f_{ii}^{(\ell)} = f_{ii} \mathbb{P}(N_i \geq k-1 | X_0 = i).$$

et par récurrence, on trouve

$$\mathbb{P}(N_i \geq k | X_0 = i) = f_{ii}^k.$$

Finalement, cela nous donne

$$\sum_{n \geq 1} P_{ii}^{(n)} = \sum_{k \geq 1} f_{ii}^k = \begin{cases} +\infty & \text{si } f_{ii} = 1, \\ \frac{f_{ii}}{1-f_{ii}} & \text{si } f_{ii} < 1. \end{cases}$$

et on voit donc que i est récurrent si et seulement si $\sum_{n \geq 1} P_{ii}^{(n)} = +\infty$. $\square$

On remarque que cela nous donne aussi que i est transient si et seulement si $\sum_{n \geq 1} P_{ii}^{(n)} < +\infty$ et en particulier si i est transient alors on a nécessairement $P_{ii}^{(n)} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ mais on verra que la réciproque n'est pas vraie en général. On a un autre critère pour montrer qu'un état est transient. Si il est possible d'aller de i à j avec une probabilité strictement positive mais qu'il n'est pas certain de revenir de j à i , alors i est transient.

THÉOREME 1.12: Critère pour état transient

Si $f_{ij} := \mathbb{P}(\exists n \geq 1, X_n = j | X_0 = i) > 0$ et $f_{ji} < 1$ alors i est transient.

Démonstration. Soit $K = \min\{k \geq 1, P_{ij}^{(k)} > 0\}$. On sait qu'il existe $j_1, \dots, j_{K-1} \in S$ tels que

$$P_{ij_1} P_{j_1 j_2} \cdots P_{j_{K-1} j} > 0$$

et de plus $j_k \neq j$ pour tout $1 \leq k \leq K-1$ par définition de K . On a alors

$$1 - f_{ii} \geq P_{ij_1} P_{j_1 j_2} \cdots P_{j_{K-1} j} (1 - f_{ji}) > 0$$

et $f_{ii} < 1$ ce qui montre que i est transient. $\square$

DÉFINITION 1.13: Relation d'équivalence

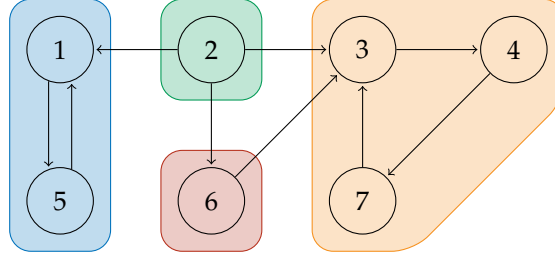
Deux états communiquent, noté $i \leftrightarrow j$, si j est accessible par i , i.e il existe un $n \geq 0$ tel que $P_{ij}^{(n)} > 0$, et si i est accessible par j , i.e il existe un $m \geq 0$ tel que $P_{ji}^{(m)} > 0$. Cela définit une relation d'équivalence.

En effet, on a $P_{ii}^{(0)} = 1$ donc $i \leftrightarrow i$ (réflexivité). Si $i \leftrightarrow j$ alors il existe $n, m \geq 0$ tels que $P_{ij}^{(n)} > 0$ et $P_{ji}^{(m)} > 0$ donc $j \leftrightarrow i$ (symétrie). Enfin, si $i \leftrightarrow k$ et $i \leftrightarrow j$ alors il existe $n, m \geq 0$ tels que $P_{ik}^{(n)} > 0$ et $P_{ji}^{(m)} > 0$ et par la propriété de Chapman–Kolmogorov,

$$P_{jk}^{(n+m)} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ik}^{(n)} > 0.$$

Comme on a une relation d'équivalence sur l'espace des états S , on peut faire une partition sur les classes d'équivalence.

EXEMPLE 8. On considère la chaîne de Markov suivante



On voit que l'on a 4 classes d'équivalence : $\{1, 5\}$, $\{2\}$, $\{6\}$ et $\{3, 4, 7\}$.

DÉFINITION 1.14: Sous-ensemble fermé

Un sous-ensemble $A \subset S$ est dit *fermé* si

$$\forall i \in A, \forall j \notin A, P_{ij} = 0.$$

Par exemple, on voit que dans l'exemple précédent, les classes d'équivalence $\{1, 5\}$ et $\{3, 4, 7\}$ sont des sous-ensembles fermés tandis que $\{2\}$ et $\{6\}$ ne le sont pas mais $\{3, 4, 6, 7\}$ est un sous-ensemble fermé. On remarque que $A = S$ et $\emptyset$ sont toujours des sous-ensembles fermés.

DÉFINITION 1.15: Chaîne irréductible

Un sous-ensemble $A \subset S$ fermé est dit *irréductible* si pour tout $i, j \in A$ alors $i \leftrightarrow j$. Une chaîne qui ne comporte qu'une seule classe d'équivalence est dite *irréductible*, c'est-à-dire que pour tout $i, j \in S$, $i \leftrightarrow j$ i.e S est irréductible.

La relation d'équivalence permet de classer les états d'une chaîne de Markov. En effet, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 1.16: Relations dans une même classe d'équivalence

Si $i \leftrightarrow j$ alors

- i est récurrent si et seulement si j est récurrent.
- i et j ont la même période.

Démonstration. $i \leftrightarrow j$ signifie qu'il existe $n, m \geq 0$ tels que $P_{ij}^{(n)} > 0$ et $P_{ji}^{(m)} > 0$. On utilise la propriété de Chapman-Kolmogorov pour écrire

$$P_{ii}^{(n+m+k)} \geq P_{ij}^{(n)} P_{jj}^{(k)} P_{ji}^{(m)}$$

et en sommant sur $k \geq 1$, on trouve

$$\sum_{k \geq 1} P_{ii}^{(n+m+k)} \geq P_{ij}^{(n)} P_{ji}^{(m)} \sum_{k \geq 1} P_{jj}^{(k)}.$$

Ainsi, si j est récurrent, i.e $\sum_{k \geq 1} P_{jj}^{(k)} = +\infty$, alors i est récurrent.

Si $P_{jj}^{(k)} > 0$ alors on a $P_{ii}^{(n+m+k)} > 0$ par le raisonnement ci-dessus. Ainsi, par définition de $d(i) = \text{pgcd}\{n \geq 1, P_{ii}^{(n)} > 0\}$, on a $d(i) | (n + m + k)$. Mais on a $P_{jj}^{(2k)} \geq P_{jj}^{(k)} P_{jj}^{(k)} > 0$ et ainsi $d(i) | n + m + 2k$. En

soustrayant, on trouve que $d(i)|(n+m+2k) - (n+m+k) = k$. Puisque $P_{jj}^{(k)} > 0$ par hypothèse, on obtient $d(j) \geq d(i)$. En inversant les rôles de i et j , on trouve l'égalité. $\square$

THÉORÈME 1.17

Si i est récurrent alors

$$f_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leftrightarrow j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. On va montrer que $f_{ij}(1 - f_{ji}) = 0$. En effet, si on a cette formule et si $i \leftrightarrow j$ alors $f_{ij} > 0$ par définition et ainsi $f_{ji} = 1$ mais si i est récurrent, nous savons que j est récurrent et donc $f_{ij} = 1$ par symétrie. Si i n'est pas accessible par j alors $f_{ji} = 0$ et ainsi $f_{ij} = 0$ et de même si j n'est pas accessible par i alors $f_{ij} = 0$ par définition.

Supposons que $i \neq j$ et que $f_{ij} > 0$, on a donc un chemin entre i et j . On note $n = \min\{k \geq 1, P_{ij}^{(k)} > 0\}$ et on choisit $j_1, \dots, j_{n-1} \in S$ tels que

$$P_{ij_1} P_{j_1 j_2} \cdots P_{j_{n-1} j} > 0.$$

On a alors

$$g_{ij}^{(n)} := \mathbb{P}(X_1 \neq i, j, X_2 \neq i, j, \dots, X_{n-1} \neq i, j, X_n = j | X_0 = i) \geq P_{ij_1} P_{j_1 j_2} \cdots P_{j_{n-1} j} > 0.$$

On a maintenant, comme i est récurrent

$$0 = \mathbb{P}(\text{ne jamais retourner en } i | X_0 = i) = 1 - f_{ii} \geq g_{ij}^{(n)}(1 - f_{ji})$$

et ainsi $f_{ji} = 1$ car $g_{ij}^{(n)} > 0$. On a donc bien montré que

$$f_{ij}(1 - f_{ji}) = 0.$$

$\square$

THÉORÈME 1.18

Si i et j sont dans la même classe d'équivalence et i est récurrent alors $f_{ki} = f_{kj}$ pour tout $k \in S$.

Démonstration. Comme $i \leftrightarrow j$, on sait que j est récurrent par le résultat précédent. Soit $k \in S$ alors on a

$$f_{kj} \geq \mathbb{P}(\text{Visite future en } j \text{ passant par } i | X_0 = k) \geq f_{ki} f_{kj} = f_{ki}.$$

Par symétrie entre i et j , on obtient que $f_{ki} = f_{kj}$. $\square$

THÉORÈME 1.19

Si C est un sous-ensemble fermée irréductible finie alors tous les états de C sont récurrents.

Démonstration. On sait que si i est récurrent et $i \leftrightarrow j$ alors j est récurrent. Il suffit donc de prouver qu'il existe au moins un état récurrent. On a déjà prouvé que

$$\mathbb{P}(N_j \geq k | X_0 = i) = f_{ij} \mathbb{P}(N_j \geq k-1 | X_0 = j) = f_{ij} f_{jj}^{k-1}$$

avec N_j le nombre de visites en j et ainsi

$$\mathbb{E}[N_j | X_0 = i] = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(N_j \geq k | X_0 = i) = f_{ij} \sum_{k \geq 1} f_{jj}^{k-1} = \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}}.$$

Si tous les états sont transients alors pour tout $j \in C$, on a $f_{jj} < 1$ et ainsi $\mathbb{E}[N_j | X_0 = i] < \infty$ pour tout

$i \in C$. Or comme C est fermé, pour tout $i \in C$, on a $\sum_{j \in C} P_{ij}^n = 1$ et ainsi

$$+\infty = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j \in C} P_{ij}^n = \sum_{j \in C} \sum_{n=1}^{+\infty} P_{ij}^n = \sum_{j \in C} \mathbb{E}[N_j | X_0 = i] < \infty$$

ce qui est absurde ! Donc au moins un des états n'est pas transient et est donc récurrent. $\square$

On peut donc classer les états d'une chaîne de Markov à un nombre fini d'états de la façon suivante.

THÉORÈME 1.20: Classification des états

Si le cardinal de S est fini alors S peut être écrit comme l'union disjointe

$$S = T \sqcup R_1 \sqcup \dots \sqcup R_k$$

avec T contenant tous les états transients et R_i sont des sous-ensembles fermés irréductibles d'états récurrents.

Démonstration. On définit l'ensemble

$$T = \{i \in S, \exists j \in S, i \rightarrow j \text{ et } j \not\rightarrow i\}$$

alors on sait que les états dans T sont transients.

Soit $i \in S \setminus T$, alors on définit la classe d'équivalence $C_i = \{j \in S, i \rightarrow j\}$. Comme $j \notin T$, nous savons que pour tout $j \in C_i$, $j \rightarrow i$. On peut vérifier que C_i est fermé, en effet pour $j \in C_i$ et $k \notin C_i$ alors on a $i \rightarrow j$ et $i \not\rightarrow k$. Si $P_{jk} > 0$ alors nous avons $j \rightarrow k$ mais ceci est impossible par transitivité car $i \rightarrow j$ et $j \rightarrow k$ implique que $i \rightarrow k$. Ainsi, ceci est impossible et $P_{jk} = 0$ et C_i est fermé.

Vérifions maintenant que C_i est irréductible. Soient $j, k \in C_i$ alors on a $j \leftrightarrow i$ et $k \leftrightarrow i$ donc $j \leftrightarrow k$. On sait donc par le résultat précédent que tous les états sont récurrents car c'est un ensemble fermé irréductible fini et on définit $R_1 = C_i$. On continue alors le processus, si $S \setminus (T \cup C_i) = \emptyset$ alors on a fini. Sinon on prend $j \in S \setminus (T \cup C_i)$ et on crée de la même façon C_j . $\square$

1.4 Distribution stationnaire

On peut se demander ce qu'il se passe si nous ne commençons pas par un état fixé mais par un état initial aléatoire. Par la formule des probabilités totales, si on écrit $S = \{1, 2, \dots\}$,

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(X_0 = i) \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(X_0 = i) P_{ij}^{(n)}$$

Si on dénote $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots) \in [0, 1]^S$ le vecteur ligne avec $\pi_i = \mathbb{P}(X_0 = i)$ alors on remarque que

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \left(\pi P_{ij}^{(n)} \right)_j$$

on considère le produit d'un vecteur ligne par une matrice de taille correspondante (possiblement infinie).

EXEMPLE 9. On considère la chaîne de Markov de la météo donnée par

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

alors si on commence avec la distribution $\pi = (0.3, 0.7)$ i.e. on commence avec 30% de chance d'être ☀ et 70% de chance d'être ☁ alors après un pas, on obtient

$$\pi P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \times 0.8 + 0.7 \times 0.4 & 0.48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, après un pas de la marche, on a maintenant 52% de chance d'être ☼ et 48% de chance d'être ☼.

DÉFINITION 1.21: Mesure et Distribution Stationnaire

$\pi \in \mathbb{R}^{\#S}$ est appelée *mesure stationnaire* si on a l'égalité

$$\pi P = \pi.$$

De plus, c'est une *distribution stationnaire* si l'on a

$$\sum_{j \in S} \pi_j = 1$$

On remarque que l'on a

$$\pi P^n = \pi P P^{n-1} = \pi P^{n-1} = \dots = \pi.$$

L'idée est de voir que si on met 1 kg de sable sur les états avec sur chaque état $i \in S$, π_i kg de sables (on peut par la normalisation $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$) alors faire un pas de la marche consiste à bouger une fraction P_{ij} de l'état i vers l'état j . Si après faire cette démarche, on obtient la même division de sable sur chaque état, on a une distribution stationnaire!

EXEMPLE 10. Pour la chaîne de la météo, ceci consiste à chercher π tel que

$$\pi P = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} = \pi$$

Ceci nous donne un système linéaire de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} 0.8\pi_1 + 0.4\pi_2 = \pi_1 \\ 0.2\pi_1 + 0.6\pi_2 = \pi_2 \end{cases} \Leftrightarrow \pi_1 = 2\pi_2.$$

On rajoute la condition de normalisation $\pi_1 + \pi_2 = 1$ et on obtient finalement

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Ainsi, si on commence avec $\mathbb{P}(\star) = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(\bullet) = \frac{1}{3}$ alors on aura toujours ces probabilités après n'importe quel nombre de pas de la chaîne.

Une question naturelle est de savoir si on peut toujours faire cela. A-t-on toujours existence de cette distribution stationnaire et unicité comme c'était le cas dans l'exemple précédent. Lorsque la chaîne a un espace d'état fini, c'est en fait un résultat d'algèbre linéaire donné par le théorème suivant.

THÉORÈME 1.22: Existence de la distribution stationnaire pour $\#S < \infty$

Supposons que $\#S < +\infty$ et P est une chaîne irréductible alors il y a une unique solution à $\pi P = \pi$ et $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$ et on a $\pi_i > 0$ pour tout $i \in S$.

Démonstration. Dénotons $n = \#S$. Soit I la matrice identité de taille n alors on sait que

$$P \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (P - I) \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Ainsi nous avons que $\text{Rang}(P - I) \leq n - 1$ i.e la matrice $P - I$ n'est pas inversible. Comme une matrice a le même rang que sa transposée nous avons que $\text{Rang}((P - I)^T) \leq n - 1$. Ainsi par définition, il existe un vecteur $u \in \text{Ker}((P - I)^T)$ avec $u \neq 0$, c'est-à-dire

$$(P - I)^T u = 0 \Leftrightarrow u^T (P - I) = 0 \Leftrightarrow u^T P = u^T.$$

En dénotant $\pi = u^\top$, nous pouvons la normaliser pour avoir $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$ puisque que l'espace des états est fini. En revanche, nous ne savons pas que les entrées de $\pi \in [0, 1]$ puisque l'on pourrait avoir des entrées positives et négatives. Il nous reste donc à voir que $\pi_i > 0$ pour tout $i \in S$ et que la distribution stationnaire est unique.

Pour le premier point, nous définissons $Q = \frac{1}{2}(I + P)$ qui est une matrice de transition où à chaque pas on fait un pas de la marche X ou on reste sur le même état avec probabilité $\frac{1}{2}$. On remarque que l'on a aussi

$$\pi Q = \frac{1}{2}(\pi + \pi P) = \frac{1}{2}(\pi + \pi) = \pi.$$

Puisque P est une chaîne irréductible, il existe un chemin entre j et i pour tout $i, j \in S$. De plus, nous pouvons choisir ce chemin d'être de longueur plus petite que $n - 1$ puisque l'on a n états (si le chemin est de longueur $\geq n$ alors on est forcément passé deux fois par le même état et on peut donc raccourcir le chemin). Ainsi nous avons

$$Q_{ji}^{n-1} > 0 \quad \forall i, j \in S.$$

Supposons que les entrées de π n'ont pas toutes le même signe alors nous avons

$$|\pi_i| = \left| \sum_{j \in S} \pi_j Q_{ji}^{n-1} \right| < \sum_{j \in S} |\pi_j| Q_{ji}^{n-1}$$

où l'inégalité est stricte car on a des annulations entre les termes de signe différents. Ainsi en sommant sur i , nous avons

$$\sum_{i \in S} |\pi_i| < \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} |\pi_j| Q_{ji}^{n-1} = \sum_{j \in S} |\pi_j| \sum_{i \in S} Q_{ji}^{n-1} = \sum_{j \in S} |\pi_j|$$

en utilisant le fait que Q^{n-1} est une matrice de transition, ce qui donne une contradiction. Donc toutes les entrées de π ont le même signe et on peut les supposer positives. Il ne nous reste plus qu'à voir que les entrées ne peuvent pas être nulles mais on a

$$\pi_i = \sum_{j \in S} \pi_j Q_{ji}^{n-1} > 0$$

car $Q_{ji}^{n-1} > 0$ et $\pi_j \geq 0$ et ne peuvent pas tous être nuls. Donc nous avons l'existence d'une distribution stationnaire telle que $\pi_i > 0$ pour tout $i \in S$.

Nous n'avons plus qu'à prouver l'unicité de la distribution stationnaire. Si nous avons $\text{Rang}(P - I) \leq n - 2$ alors nous aurions 2 solutions π et μ que l'on peut choisir orthogonales $\langle \pi, \mu \rangle = \sum_{i \in S} \pi_i \mu_i = 0$. Mais nous avons prouvé que π_i et μ_i doivent être strictement positives pour tout $i \in S$ donc cela est impossible.

Ainsi il existe une unique distribution stationnaire π et nous avons pour tout $i \in S$, $\pi_i > 0$. □

Commençons par voir des cas particuliers importants où le calcul de la distribution stationnaire est facile.

DÉFINITION 1.23: Matrice bistochastique

P est une matrice bistochastique si

$$\forall i \in S, \sum_{j \in S} P_{ij} = 1 \text{ et } \forall j \in S, \sum_{i \in S} P_{ij} = 1.$$

THÉORÈME 1.24: Distribution stationnaire pour matrice bistochastique

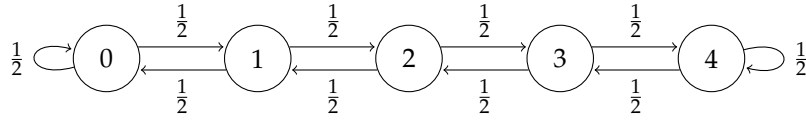
Si P est une matrice bistochastique sur n états alors $\pi_i = \frac{1}{n}$ pour tout $i \in S$ (la distribution uniforme) est la distribution stationnaire.

Démonstration. On a

$$(\pi P)_j = \sum_{i \in S} \pi_i P_{ij} = \sum_{i \in S} \frac{1}{n} P_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i \in S} P_{ij} = \frac{1}{n} = \pi_j.$$

□

EXEMPLE 11. On considère la chaîne de Markov suivante



alors on remarque que la matrice de transition est

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

qui est une matrice bistochastique. Ainsi la distribution stationnaire est la distribution uniforme

$$\pi = \left[\frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \right]$$

.

Une propriété plus générale est la notion de mesure réversible. On verra que toutes les mesures réversibles sont stationnaires mais la réciproque n'est pas vraie en général.

DÉFINITION 1.25: Mesure réversible

π est une mesure réversible pour P si pour tout $i, j \in S$,

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}.$$

THÉORÈME 1.26: Mesure réversible et mesure stationnaire

Une mesure réversible pour P est toujours une mesure stationnaire pour P . La réciproque est fausse.

Démonstration. Prouvons que $\pi P = \pi$. En effet, on a

$$(\pi P)_j = \sum_{i \in S} \pi_i P_{ij} = \sum_{i \in S} \pi_j P_{ji} = \pi_j \sum_{i \in S} P_{ji} = \pi_j$$

car P est une matrice de transition. □

EXEMPLE 12. Considérons la chaîne de Markov suivante

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

On remarque que la matrice est bistochastique donc la distribution stationnaire est $\pi = \left[\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \right]$. Cependant, on remarque que

$$\pi_1 P_{12} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{10} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} = \pi_2 P_{21}$$

et ainsi π n'est pas une mesure réversible. En fait, si on cherche une mesure réversible, on commence par chercher

$$0 = \pi_1 P_{13} = \pi_3 P_{31} \Rightarrow \pi_3 = 0$$

et ensuite

$$\pi_2 P_{23} = \pi_3 P_{32} = 0 \Rightarrow \pi_2 = 0$$

mais du coup $\pi_1 = 1$ car π doit être une distribution mais on aurait l'équation

$$\pi_1 P_{12} = \frac{1}{2} = \pi_2 P_{21} = 0$$

et il n'y a donc pas de mesure réversible.

EXEMPLE 13. Regardons un exemple où on peut trouver une mesure réversible, on considère l'urne d'Ehrenfest avec $N = 3$ boules. L'espace des états est $S = \{0, 1, 2, 3\}$ où l'état i correspond au fait qu'il y a i boules dans la première urne. La matrice de transition est

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cherchons une mesure réversible π . On a les équations

$$\begin{aligned} \pi_0 P_{01} &= \pi_1 P_{10} \Rightarrow \pi_1 = 3\pi_0, \\ \pi_1 P_{12} &= \pi_2 P_{21} \Rightarrow \pi_2 = \pi_1 = 3\pi_0, \\ \pi_2 P_{23} &= \pi_3 P_{32} \Rightarrow \pi_3 = \frac{1}{3}\pi_2 = \pi_0. \end{aligned}$$

Comme on a la normalisation $\sum_{i=0}^3 \pi_i = 1$ on trouve

$$\pi_0 + 3\pi_0 + 3\pi_0 + \pi_0 = 8\pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{8}$$

et ainsi

$$\pi = \left[\frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{8} \right].$$

Nous allons maintenant voir des propriétés d'existence et d'unicité des distribution stationnaires pour certaines chaînes de Markov.

THÉORÈME 1.27

Soit X une chaîne de Markov irréductible et récurrente alors pour $i \in S$, la mesure $\mu^{(i)}$ définie par

$$\mu_j^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = j, T_i > n | X_0 = i) \quad \text{avec} \quad T_i = \min_{n \geq 1} \{X_n = i\}$$

est une mesure stationnaire et on a $0 < \mu_j^{(i)} < +\infty$ pour tout $j \in S$.

Démonstration. Soit $i \in S$, alors si $k \neq i$, on a

$$\begin{aligned} (\mu^{(i)} P)_k &= \sum_{j \in S} \mu_j^{(i)} P_{jk} = \sum_{j \in S} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = j, T_i > n | X_0 = i) \mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = j) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j \in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = k, T_i > n | X_0 = i) \mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = j, T_i > n, X_0 = i) \end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété de Markov pour la dernière égalité. Par la formule des probabilités totales, on a

$$(\mu^{(i)} P)_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j \in S} \mathbb{P}(X_n = j, X_{n+1} = k, T_i > n | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j \in S} \mathbb{P}(X_n = j, X_{n+1} = k, T_i > n+1 | X_0 = i)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{n+1} = k, T_i > n+1 | X_0 = i) \\
&= \mu_k^{(i)} - \mathbb{P}(X_0 = k, T_i > 0 | X_0 = i) = \mu_k^{(i)}
\end{aligned}$$

car $k \neq i$. Si $k = i$, avec le même raisonnement,

$$\begin{aligned}
(\mu^{(i)} P)_i &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{n+1} = i, T_i > n | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j \in S} \mathbb{P}(X_n = j, T_i = n+1 | X_0 = i) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_i = n+1 | X_0 = i) = 1 = \mu_i^{(i)}.
\end{aligned}$$

Il reste à voir que $0 < \mu_j^{(i)} < +\infty$ pour tout $j \in S$. On a clairement $\mu_i^{(i)} = 1 < +\infty$. Pour $j \neq i$, on a

$$\mu_i^{(i)} = 1 = \sum_{k \in S} \mu_k^{(i)} P_{ki}^n \geq \mu_j^{(i)} P_{ji}^n.$$

Comme X est irréductible, il existe n tel que $P_{ji}^n > 0$ et ainsi $\mu_j^{(i)} < +\infty$. De plus, comme X est récurrent, on a $f_{ij} = 1$ et ainsi il existe un chemin de i à j sans repasser par i donc $\mathbb{P}(X_n = j, T_i > n | X_0 = i) > 0$ pour au moins un n et ainsi $\mu_j^{(i)} > 0$. $\square$

Il faut faire attention que le théorème précédent nous donne l'existence de *mesures stationnaires* et non pas de *distribution stationnaire*. En particulier, il n'est pas nécessairement possible de normaliser ces mesures. Nous pouvons maintenant voir ce corollaire qui donne l'existence de la distribution stationnaire pour les chaînes irréductibles et récurrentes positives.

COROLLAIRE 1.28. Soit X une chaîne de Markov irréductible et récurrente positive i.e $\mathbb{E}[T_i | X_0 = i] < \infty$ alors la chaîne admet une distribution stationnaire.

Démonstration. On a pour $i \in S$ que $\mu_j^{(i)}$ est une mesure stationnaire. On doit juste vérifier que l'on peut la normaliser pour obtenir une distribution. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in S} \mu_j^{(i)} &= \sum_{j \in S} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_n=j, T_i > n} | X_0 = i] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{j \in S} \mathbb{1}_{X_n=j, T_i > n} \middle| X_0 = i\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{T_i > n} | X_0 = i] \\
&= \mathbb{E}[T_i | X_0 = i].
\end{aligned}$$

Comme la chaîne de Markov est récurrente positive, on a $\mathbb{E}[T_i | X_0 = i] < \infty$ et on peut donc définir, pour $i \in S$,

$$\pi_j^{(i)} = \frac{\mu_j^{(i)}}{\mathbb{E}[T_i | X_0 = i]}.$$

$\square$

A priori, le théorème précédent nous donne l'existence de plusieurs distributions stationnaires puisque nous pouvons construire $\pi^{(i)}$ pour tout $i \in S$. Nous allons maintenant voir l'unicité de la distribution stationnaire

THÉORÈME 1.29

Soit X une chaîne de Markov irréductible. Si X admet une distribution stationnaire π alors

$$\pi_i = \frac{1}{\mathbb{E}[T_i | X_0 = i]}.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous savons que

$$\pi_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \pi_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\pi P^k)_i$$

car π est une distribution stationnaire. Par définition de P^k , on a

$$\pi_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = i | X_0 \sim \pi) = \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=i} \middle| X_0 \sim \pi \right] = \frac{1}{n} \mathbb{E} [N_i(n) | X_0 \sim \pi]$$

avec $N_i(n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=i}$ le nombre de visites de l'état i jusqu'au temps n . On voit que les temps de retour dans l'état i forment une suite de variables aléatoires i.i.d. notées $(\tau_k)_{k \geq 1}$ avec $\tau_k = T_i^{(k)} - T_i^{(k-1)}$ où $T_i^{(k)}$ est le temps du k -ième retour dans l'état i et $T_i^{(0)} = 0$ par la propriété de Markov. Par la loi des grands nombres, on a donc

$$\frac{1}{m} \sum_{\ell=1}^m \tau_\ell \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\tau_1] = \mathbb{E}[T_i | X_0 = i].$$

En dénotant $R(k) = \sum_{\ell=1}^k \tau_\ell$ le temps du k -ième retour dans l'état i , on a par définition

$$R(N_i(n)) \leq n < R(N_i(n) + 1).$$

et ainsi

$$\frac{R(N_i(n))}{N_i(n)} \leq \frac{n}{N_i(n)} < \frac{R(N_i(n) + 1)}{N_i(n)} = \frac{R(N_i(n) + 1)}{N_i(n) + 1} \frac{N_i(n) + 1}{N_i(n)}.$$

Par la loi des grands nombres, on a

$$\frac{R(N_i(n))}{N_i(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}[T_i | X_0 = i] \quad \text{et} \quad \frac{R(N_i(n) + 1)}{N_i(n) + 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}[T_i | X_0 = i]$$

et de plus, on a clairement $\frac{N_i(n)+1}{N_i(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 1$. Ainsi, par le théorème des gendarmes, on a

$$\frac{n}{N_i(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}[T_i | X_0 = i]$$

et donc

$$\frac{N_i(n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\mathbb{E}[T_i | X_0 = i]}.$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, on a

$$\pi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[N_i(n) | X_0 \sim \pi] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{N_i(n)}{n} \middle| X_0 \sim \pi \right] = \frac{1}{\mathbb{E}[T_i | X_0 = i]}.$$

□

De l'existence et l'unicité de la distribution stationnaire, on peut déduire le théorème suivant.

THÉORÈME 1.30

Une chaîne de Markov X irréductible admet une distribution stationnaire si et seulement si elle est récurrente positive.

Démonstration. On a déjà vu que si X est irréductible et récurrente positive alors elle admet une distribution stationnaire. Réciproquement, supposons que X admet une distribution stationnaire π . Par le théorème précédent, on a pour tout $i \in S$,

$$\pi_i = \frac{1}{\mathbb{E}[T_i | X_0 = i]}$$

si $\pi_i > 0$ alors on a $\mathbb{E}[T_i | X_0 = i] < \infty$ et ainsi i est un état récurrent positif. Il reste à voir qu'on ne peut pas avoir d'état récurrent nul. En effet, si j est un état récurrent nul, on a $\mathbb{E}[T_j | X_0 = j] = +\infty$ et ainsi $\pi_j = 0$. Il

existe nécessairement un état $i \in S$ avec $\pi_i > 0$ car $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$ et par irréductibilité, pour tout $i \in S$, il existe n tel que $P_{ij}^n > 0$ et ainsi

$$0 = \pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i P_{ij}^n \geq \pi_i P_{ij}^n > 0$$

ce qui est une contradiction. Ainsi tous les états sont récurrents positifs et la chaîne est récurrente positive. $\square$

On remarque qu'on a vu qu'une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état fini admet toujours une distribution stationnaire et est donc récurrente positive. Nous pouvons résumer les résultats précédents dans le théorème suivant.

THÉORÈME 1.31: Existence et unicité de la distribution stationnaire

Une chaîne de Markov X irréductible admet une distribution stationnaire si et seulement si elle est récurrente positive. Dans ce cas on a la formule

$$\pi_i = \frac{1}{\mathbb{E}[T_i | X_0 = i]}, \quad \text{avec } T_i = \min_{n \geq 1} \{X_n = i\}$$

et ainsi la distribution stationnaire est unique.

Un des résultats les plus importants est le théorème de convergence vers la distribution stationnaire. Il nous dit que peu importe la distribution initiale, la chaîne de Markov converge vers la distribution stationnaire lorsque le nombre de pas tend vers l'infini.

THÉORÈME 1.32: Convergence vers la distribution stationnaire

Soit X une chaîne irréductible, apériodique et admettant une distribution stationnaire π alors

$$P_{ij}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi_j.$$

Avant de prouver ce théorème, nous allons avoir besoin d'un lemme technique que nous donnons sans preuve.

LEMME 1.33. Soit X une chaîne de Markov, si $i \in S$ a pour période 1 alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $P_{ii}^n > 0$.

Preuve du Théorème 1.32. La preuve de ce théorème est basée sur la construction d'une chaîne de Markov couplée. Soit S l'espace des états de X . On définit une matrice de transition sur $S \times S$ par

$$Q_{(i,j)(k,l)} = P_{ik} P_{jl}.$$

On considère la chaîne de Markov $(Y_n)_{n \geq 0}$ sur $S \times S$ avec la matrice de transition Q . Montrons tout d'abord que Q est irréductible et apériodique. Soient (i, j) et (k, l) dans $S \times S$. Comme P est irréductible, il existe n_1 et n_2 tels que $P_{ik}^{n_1} > 0$ et $P_{jl}^{n_2} > 0$ et de plus il existe m tel que pour tout $r \geq m$, $P_{kk}^r > 0$ et $P_{ll}^r > 0$ car P est apériodique. Ainsi

$$Q_{(i,j)(k,l)}^{n_1+n_2+m} = P_{ik}^{n_1+n_2+m} P_{jl}^{n_1+n_2+m} \geq P_{ik}^{n_1} P_{kk}^{n_2+m} P_{jl}^{n_2} P_{ll}^{n_1+m} > 0$$

et donc Q est irréductible. De plus, comme P est apériodique, il existe m tel que pour tout $r \geq m$, $P_{ii}^r > 0$. Ainsi, pour $n \geq m$, on a

$$Q_{(i,j)(i,j)}^n = P_{ii}^n P_{jj}^n > 0$$

et donc Q est apériodique.

Nous allons maintenant prouver que les deux coordonnées de Y_n se rencontrent presque sûrement. C'est-à-dire que si nous écrivons $Y_n = (Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)})$, nous avons

$$\mathbb{P}(\exists n \geq 0, Y_n^{(1)} = Y_n^{(2)}) = \mathbb{P}(T < \infty) = 1 \quad \text{avec} \quad T = \min_{n \geq 0} \{Y_n^{(1)} = Y_n^{(2)}\}.$$

On voit que la distribution $\mu_{(i,j)} = \pi_i \pi_j$ est une distribution stationnaire pour Q car

$$(\mu Q)_{(k,l)} = \sum_{(i,j) \in S \times S} \mu_{(i,j)} Q_{(i,j)(k,l)} = \sum_{(i,j) \in S \times S} \pi_i \pi_j P_{ik} P_{jl} = \pi_k \pi_l = \mu_{(k,l)}.$$

Comme Q est irréductible, par le Théorème 1.31, la chaîne de Markov Y est récurrente positive. En particulier, les états $\{(i,i), i \in S\}$ sont récurrents positifs et on a

$$\mathbb{P} \left(\min_{n \geq 0} \{Y_n = (i,i)\} < \infty \right) = \mathbb{P} \left(\min_{n \geq 0} \{Y_n^{(1)} = Y_n^{(2)} = i\} < \infty \right) = 1.$$

On finit donc par dire que

$$T \leq \min_{n \geq 0} \{Y_n^{(1)} = Y_n^{(2)} = i\} < \infty$$

presque sûrement et donc

$$\mathbb{P}(T < \infty) = 1.$$

Regardons maintenant que les deux coordonnées de Y_n ont la même distribution sur l'événement $\{T \leq n\}$. En effet, pour tout $j \in S$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n^{(1)} = j, T \leq n) &= \sum_{m=1}^n \sum_{i \in S} \mathbb{P}(Y_n^{(1)} = j \mid Y_m^{(1)} = i, T = m) \mathbb{P}(Y_m^{(1)} = i, T = m) \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{i \in S} \mathbb{P}(T = m, Y_m^{(1)} = i) \mathbb{P}(Y_n^{(1)} = j \mid Y_m^{(1)} = i) \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{i \in S} \mathbb{P}(T = m, Y_m^{(2)} = i) \mathbb{P}(Y_n^{(2)} = j \mid Y_m^{(2)} = i) \\ &= \mathbb{P}(Y_n^{(2)} = j, T \leq n) \end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété de Markov pour la deuxième égalité et le fait que $Y_m^{(1)} = Y_m^{(2)}$ sur l'événement $\{T = m\}$ pour la troisième égalité. Nous pouvons maintenant conclure la preuve du théorème. En effet, pour tout $i \in S$,

$$\left| \mathbb{P}(Y_n^{(1)} = j) - \mathbb{P}(Y_n^{(2)} = j) \right| \leq \mathbb{P}(Y_n^{(1)} = j, T > n) + \mathbb{P}(Y_n^{(2)} = j, T > n)$$

et en sommant

$$\sum_{j \in S} \left| \mathbb{P}(Y_n^{(1)} = j) - \mathbb{P}(Y_n^{(2)} = j) \right| \leq 2\mathbb{P}(T > n).$$

Si on suppose que $Y_0^{(1)} = i$ et $Y_0^{(2)} \sim \pi$, on a $Y_n^{(2)} \sim \pi$ car π est une distribution stationnaire. Ainsi,

$$\sum_{j \in S} \left| P_{ij}^n - \pi_j \right| \leq 2\mathbb{P}(T > n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

car $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ et ainsi on a la convergence voulue

$$P_{ij}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi_j.$$

□

EXEMPLE 14. Urnes d'Ehrenfest paresseuse : Considérons une chaîne de Markov sur l'espace d'états $S = \{0, 1, \dots, 20\}$, de probabilités de transition :

$$P(k,k) = \frac{1}{2}, \quad P(k,k+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{20-k}{20} \quad \text{pour } k < 20, \quad P(k,k-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{20} \quad \text{pour } k > 0$$

Cette chaîne est irréductible et apériodique. On peut vérifier que la distribution stationnaire est

$$\pi(k) = 2^{-20} \binom{20}{k},$$

qui est la loi Binomiale $\left(20, \frac{1}{2}\right)$.

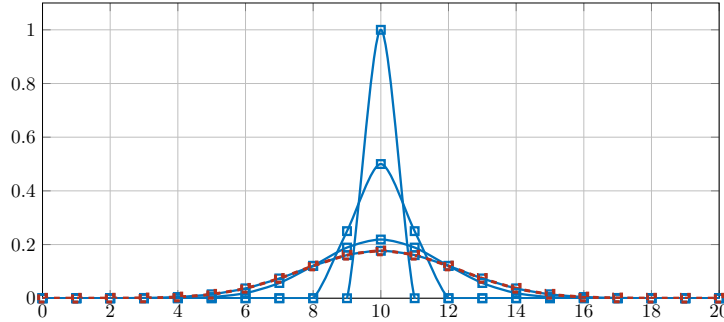


FIGURE 1 – Simulation de la chaîne de Markov des urnes d'Ehrenfest paresseuse avec 20 boules, en partant de l'état 10. On observe la convergence vers la distribution stationnaire (en rouge).

2. CHAÎNES DE MARKOV EN TEMPS CONTINU

En temps discret, on rappelle que la propriété de Markov peut s'écrire comme

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

On peut généraliser cela en temps continu

DÉFINITION 2.1: Chaîne de Markov en temps continu

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique à valeurs dans un espace d'états dénombrable S . On dit que X est une chaîne de Markov en temps continu si pour tout $s, t_1, t_2, \dots, t_n, t \geq 0$ et pour tout $i, j, i_0, \dots, i_n \in S$,

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_s = i, X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_0} = i_0) = \mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_s = i).$$

On peut, tout comme dans le cas en temps discret, introduire les probabilités de transition en temps continu, pour tout $i, j \in S$ et $t \geq 0$,

$$p_t(i, j) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i).$$

Nous avons aussi la propriété de Chapman-Kolmogorov qui s'écrit de la même manière qu'en temps discret.

THÉORÈME 2.2: Propriété de Chapman-Kolmogorov en temps continu

Soit X une chaîne de Markov en temps continu, pour tout $i, j \in S$ et pour tout $s, t \geq 0$,

$$p_{t+s}(i, j) = \sum_{k \in S} p_s(i, k) p_t(k, j).$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle en temps discret, on a

$$\begin{aligned} p_{t+s}(i, j) &= \mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_0 = i) = \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_s = k, X_0 = i) \mathbb{P}(X_s = k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_s = k) p_s(i, k) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k \in S} p_t(k, j) p_s(i, k).$$

□

On peut se demander comment décrire la chaîne à partir des probabilités de transition p_t . Pour cela, on introduit la notion de générateur infinitésimal.

DÉFINITION 2.3: Générateur infinitésimal

Soit X une chaîne de Markov en temps continu avec probabilités de transition $p_t(i, j)$. Le générateur infinitésimal de X est la matrice $Q = (Q_{ij})_{i, j \in S}$ définie par

$$Q_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_t(i, j) - \mathbb{1}_{i=j}}{t}$$

pour tout $i, j \in S$.

La quantité Q_{ij} représente le taux de transition de l'état i vers l'état j . En particulier, si on définit $\lambda_i = \sum_{j \neq i} Q_{ij}$, cela correspond au taux de sortie de l'état i . Ainsi si $\lambda_i = 0$, l'état i est absorbant et si $\lambda_i > 0$ alors on peut définir $r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\lambda_i}$ qui correspond à la probabilité de transition de l'état i vers l'état j conditionnellement au fait que la chaîne quitte l'état i . On remarque que par définition, on a pour tout $i \in S$,

$$Q_{ii} = -\lambda_i = -\sum_{j \neq i} Q_{ij}.$$

Les sommes des lignes de Q sont donc nulles.

2.1 Construction des chaînes de Markov en temps continu

Supposons qu'il n'y ait pas d'états absorbants, c'est-à-dire que pour tout $i \in S$, $\lambda_i > 0$. Nous allons construire une chaîne de Markov en temps continu à partir de son générateur infinitésimal Q .

Pour cela, on considère une chaîne de Markov en temps discret $(Y_n)_{n \geq 0}$ avec la matrice de transition $R = (r_{ij})_{i, j \in S}$ où $r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\lambda_i}$ pour $i \neq j$ et $r_{ii} = 0$. Y va nous donner le "trajet" de la chaîne de Markov en temps continu X .

On considère aussi une suite de variables aléatoires exponentielles $(\tau_n)_{n \geq 1}$ indépendantes et de paramètre 1 et indépendantes de la chaîne $(Y_n)_{n \geq 0}$. On rappelle que $\tau \sim \text{Exp}(1)$ a pour fonction de densité $f_\tau(t) = e^{-t} \mathbb{1}_{t \geq 0}$ et pour fonction de répartition $F_\tau(t) = (1 - e^{-t}) \mathbb{1}_{t \geq 0}$.

On construit la chaîne de la façon suivante :

- À $t = 0$ on commence en $X_0 = Y_0$. On reste dans l'état X_0 pendant un temps $t_1 = \frac{\tau_1}{\lambda_{X_0}} \sim \text{Exp}(\lambda_{Y_0})$.
- À $t = t_1$, on saute dans l'état $X_{t_1} = Y_1$. On reste ensuite dans l'état X_{t_1} pendant un temps $t_2 = \frac{\tau_2}{\lambda_{X_{t_1}}}$.
- Au temps $t_1 + t_2$, on saute dans l'état $X_{t_1+t_2} = Y_2$ et ainsi de suite.

Cela ressemble au cas discret mais à la place de sauter à chaque entier, on attend un temps aléatoire exponentiel. On peut formellement définir les temps de saut T_n par

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{\tau_k}{\lambda_{Y_{k-1}}}$$

et ainsi pour tout $t \geq 0$, on définit

$$X_t = Y_n \quad \text{si } T_n \leq t < T_{n+1}.$$

On peut vérifier que X est bien une chaîne de Markov en temps continu avec générateur infinitésimal Q .

En général, on nous donne le générateur infinitésimal Q et on construit la chaîne de Markov en temps continu X de la façon présentée ci-dessus. On peut se demander comment retrouver les probabilités de transition $p_t(i, j)$ à partir de Q . Pour cela, on utilise les équations de Kolmogorov.

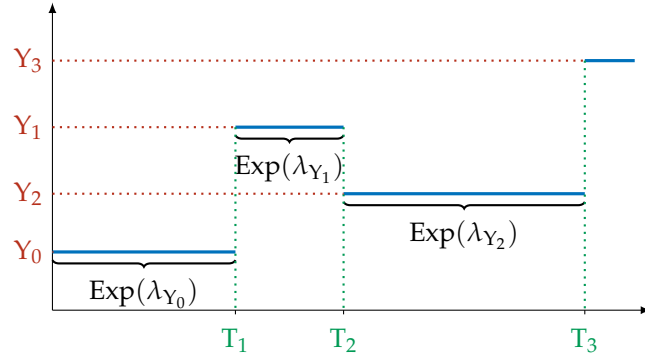


FIGURE 2 – Illustration de la construction d'une chaîne de Markov à temps continu à partir d'une chaîne en temps discret et de variables exponentielles.

THÉORÈME 2.4: Équations de Kolmogorov

Soit X une chaîne de Markov en temps continu avec générateur infinitésimal Q et probabilités de transition $p_t(i, j)$. Pour tout $i, j \in S$ et $t \geq 0$, on a

$$\frac{d}{dt} p_t(i, j) = \sum_{k \in S} p_t(i, k) Q_{kj} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt} P_t = P_t Q \quad (\text{Équation progressive de Kolmogorov})$$

et

$$\frac{d}{dt} p_t(i, j) = \sum_{k \in S} Q_{ik} p_t(k, j) \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt} P_t = Q P_t \quad (\text{Équation rétrograde de Kolmogorov}).$$

Démonstration. On commence par la première équation. Par la propriété de Chapman-Kolmogorov, on a pour tout $s, t \geq 0$,

$$p_{t+s}(i, j) - p_t(i, j) = \sum_{k \in S} p_t(i, k) p_s(k, j) - p_t(i, j) = \sum_{k \neq j} p_t(i, k) p_s(k, j) + (p_s(j, j) - 1) p_t(i, j).$$

Ainsi cela nous donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_t(i, j) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{p_{t+s}(i, j) - p_t(i, j)}{s} = \sum_{k \neq j} p_t(i, k) \left(\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{p_s(k, j)}{s} \right) + \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{p_s(j, j) - 1}{s} p_t(i, j) \\ &= \sum_{k \neq j} p_t(i, k) Q_{kj} + Q_{jj} p_t(i, j) \\ &= \sum_{k \in S} p_t(i, k) Q_{kj} = P_t Q \end{aligned}$$

La deuxième équation se prouve de la même manière en dérivant par rapport à t et en regardant d'abord $p_{t+s}(i, j) - p_s(i, j)$. $\square$

Ces équations permettent de retrouver les probabilités de transition à partir du générateur infinitésimal Q . En effet, si on note $P_0 = I$ la matrice identité, la solution des équations de Kolmogorov est donnée par

$$P_t = e^{tQ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tQ)^n}{n!}.$$

En effet, cela se compare aux solutions d'équations différentielles linéaires car si $f'(t) = A f(t)$ alors les solutions sont données par $f(t) = f(0)e^{At}$. Pour calculer l'exponentielle de matrice, il est facile de le faire lorsque la matrice Q est diagonalisable. En effet, si $Q = P D P^{-1}$ avec D diagonale, on a $Q^n = P D^n P^{-1}$ et ainsi

$$e^{tQ} = P e^{tD} P^{-1}$$

et e^{tD} est facile à calculer car c'est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont donnés par

$e^{t\lambda_i}$ où les λ_i sont les valeurs propres de Q ,

$$e^{tQ} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Mous pouvons nous demander pourquoi les temps entre chaque saut est exponentiel. La raison principale est la propriété de manque de mémoire de la loi exponentielle.

PROPOSITION 2.5. Soit $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $s, t \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(T > s + t | T > t) = \mathbb{P}(T > s).$$

Démonstration. On calcule

$$\mathbb{P}(T > s + t | T > t) = \frac{\mathbb{P}(T > s + t)}{\mathbb{P}(T > t)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(T > s).$$

□

Ainsi avoir des temps de séjour exponentiels et une chaîne de Markov en temps discret pour les sauts permet d'avoir une chaîne de Markov en temps continu grâce à la propriété de manque de mémoire. En effet, si on est dans l'état i depuis un temps t_0 et que le temps de séjour est exponentiel de paramètre λ_i , la probabilité de rester encore un temps s dans l'état i est

$$\mathbb{P}(T_i > t_0 + s | T_i > t_0) = \mathbb{P}(T_i > s) = e^{-\lambda_i s}.$$

Ainsi, la chaîne n'a pas de mémoire du temps déjà passé dans l'état i et le temps de séjour restant est toujours exponentiel de paramètre λ_i . Cela permet de définir une chaîne de Markov en temps continu.

On peut se demander pourquoi nous retrouvons les mêmes probabilités de transition si on considère une chaîne de Markov en temps continu construite à partir d'une chaîne en temps discret avec des temps de séjour exponentiels. Mais on a

$$\mathbb{P}(X_h = i | X_0 = i) \geq \mathbb{P}(t_1 > h) = e^{-\lambda_i h} = 1 - \lambda_i h + o(h) = 1 + Q_{ii}h + o(h).$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_h = j | X_0 = i) &\geq \mathbb{P}(t_1 \leq h, t_1 + t_2 > h, Y_1 = j | X_0 = i) \geq \mathbb{P}(t_1 \leq h, t_2 > h, Y_1 = j | X_0 = i) \\ &= (1 - e^{-\lambda_i h})e^{-\lambda_j h} r_{ij} = r_{ij} \lambda_i h + o(h) \\ &= Q_{ij}h + o(h). \end{aligned}$$

On obtient donc la formule générale

$$p_h(i, j) \geq \delta_{ij} + Q_{ij}h + o(h).$$

On peut en fait voir que cette inégalité est une égalité. On peut voir que tous les termes sont positifs et la somme sur j de chaque côté donne 1. Donc tous les termes doivent être égaux et on a bien

$$p_h(i, j) = \delta_{ij} + Q_{ij}h + o(h).$$

Ainsi, on retrouve bien les mêmes probabilités de transition à l'ordre h puisque que l'on peut écrire

$$p_{t+h}(i, j) = \sum_{k \in S} p_t(i, k) p_h(k, j) = \sum_{k \in S} p_t(i, k) (\delta_{jk} + Q_{jk}h + o(h))$$

et ainsi

$$\frac{p_{t+h}(i, j) - p_t(i, j)}{h} = \sum_{k \in S} p_t(i, k) q_{kj} + o(1) \Rightarrow \frac{d}{dt} P_t = P_t Q$$

et on retrouve bien l'équation progressive de Kolmogorov qui a une solution unique avec la condition $P_0 = I$.

EXEMPLE 15. On considère deux machines fonctionnant de manière indépendante. Chacune des machines peut être en état de fonctionnement (F) ou en état de panne (P). Lorsqu'une machine est en état de fonctionnement, elle tombe en panne au taux $\mu > 0$ et lorsqu'elle est en état de panne, elle est réparée au taux $\nu > 0$. Mais attention, il n'y a qu'un réparateur et peut donc réparer qu'une machine à la fois. On note X_t le nombre de machines en état de fonctionnement au temps t . Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov en temps continu avec espace d'états $S = \{0, 1, 2\}$.

- Si $X_t = 2$, les deux machines fonctionnent. La première machine tombe en panne au taux μ et la deuxième aussi au taux μ . Le taux de sortie de l'état 2 est donc $\lambda_2 = 2\mu$ et la probabilité d'aller de l'état 2 à l'état 1 est $r_{21} = \frac{2\mu}{2\mu} = 1$. Ainsi, on a $Q_{21} = 2\mu$ et $Q_{22} = -2\mu$. On peut le voir par le calcul

$$\mathbb{P}(\min(T_1, T_2) > t) = \mathbb{P}(T_1 > t, T_2 > t) = \mathbb{P}(T_1 > t)\mathbb{P}(T_2 > t) = e^{-\mu t} e^{-\mu t} = e^{-2\mu t}.$$

- Si $X_t = 1$, une machine fonctionne et l'autre est en panne. La machine en fonctionnement tombe en panne au taux μ et la machine en panne est réparée au taux ν . Le taux de sortie de l'état 1 est donc $\lambda_1 = \mu + \nu$. La probabilité d'aller de l'état 1 à l'état 0 est $r_{10} = \frac{\mu}{\mu + \nu}$ et la probabilité d'aller de l'état 1 à l'état 2 est $r_{12} = \frac{\nu}{\mu + \nu}$. Ainsi, on a $Q_{10} = \mu$, $Q_{12} = \nu$ et $Q_{11} = -(\mu + \nu)$. On peut le voir par le calcul suivant, si $T_1 \sim \text{Exp}(\mu)$ est le temps de la panne de la machine en fonctionnement et $T_2 \sim \text{Exp}(\nu)$ est le temps de réparation de la machine en panne, on a

$$r_{12} = \mathbb{P}(T_1 < T_2) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T_2 > t) f_{T_1}(t) dt = \int_0^\infty e^{-\nu t} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\mu}{\mu + \nu}.$$

- Si $X_t = 0$, les deux machines sont en panne. Une des machines est en train d'être réparée au taux ν pendant que l'autre reste en panne. Ainsi on attend un temps $\sim \text{Exp}(\nu)$ avant de passer de l'état 0 à l'état 1. Le taux de sortie de l'état 0 est donc $\lambda_0 = \nu$ et la probabilité d'aller de l'état 0 à l'état 1 est $r_{01} = 1$. Ainsi, on a $Q_{01} = \nu$ et $Q_{00} = -\nu$.

On obtient finalement la matrice de transition et le générateur infinitésimal

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mu}{\mu + \nu} & 0 & \frac{\nu}{\mu + \nu} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{bmatrix} -\nu & \nu & 0 \\ \mu & -(\mu + \nu) & \nu \\ 0 & 2\mu & -2\mu \end{bmatrix}.$$

On peut continuer en regardant maintenant $S_i = \mathbb{E}[\text{Temps avant } 0 | X_0 = i]$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$. On a clairement $S_0 = 0$ et en utilisant la propriété de Markov, on peut conditionner "à un pas", qui consiste à regarder le premier changement d'état, on obtient pour $i = 1$,

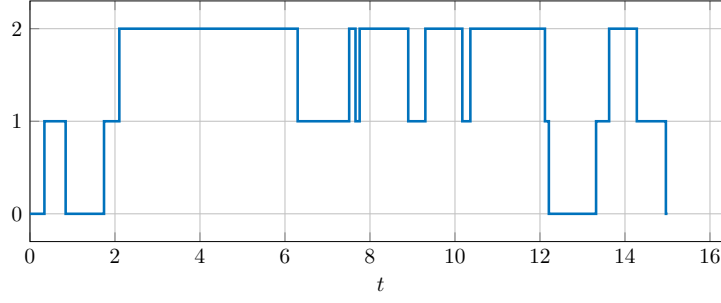
$$S_1 = \mathbb{E} \left[\inf_{t \geq 0} \{X_t = 0\} | X_0 = 1 \right] = \mathbb{E} \left[t_1 + \inf_{t \geq t_1} \{X_t = 0\} | X_0 = 1 \right] = \mathbb{E}[t_1 | X_0 = 1] + \mathbb{E} \left[\inf_{t \geq t_1} \{X_t = 0\} | X_0 = 1 \right]$$

où $t_1 \sim \text{Exp}(\mu + \nu)$ est le temps avant le premier changement d'état. En utilisant la propriété de Markov au temps t_1 , on a, avec Y la chaîne de Markov en temps discret associée,

$$S_1 = \frac{1}{\mu + \nu} + \mathbb{E} \left[\inf_{t \geq 0} \{X_t = 0\} | X_0 = 0 \right] \mathbb{P}(Y_1 = 0 | Y_0 = 1) + \mathbb{E} \left[\inf_{t \geq 0} \{X_t = 0\} | X_0 = 2 \right] \mathbb{P}(Y_1 = 2 | Y_0 = 1)$$

qui nous donne l'équation

$$S_1 = \frac{1}{\mu + \nu} + S_0 \frac{\mu}{\mu + \nu} + S_2 \frac{\nu}{\mu + \nu} = \frac{1}{\mu + \nu} + S_2 \frac{\nu}{\mu + \nu}.$$

FIGURE 3 – Simulation of X_t for $\mu = \frac{1}{3}$ and $\nu = \frac{2}{3}$.

De la même manière, pour $i = 2$,

$$S_2 = \frac{1}{2\mu} + S_1.$$

On obtient donc le système linéaire

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_1 = \frac{1}{\mu+\nu} + S_2 \frac{\nu}{\mu+\nu} \\ S_2 = \frac{1}{2\mu} + S_1 \end{cases}$$

dont la solution est

$$S_0 = 0, \quad S_1 = \frac{2\mu + \nu}{2\mu^2} \quad \text{et} \quad S_2 = \frac{3\mu + \nu}{2\mu^2}.$$

2.2 Processus de Poisson

Les processus de Poisson est un exemple de chaîne de Markov en temps continu très utilisé en pratique. C'est un processus de comptage qui compte le nombre d'événements arrivant dans un intervalle de temps. On peut le définir de la manière suivante.

DÉFINITION 2.6: Processus de Poisson

Soient $(\tau_n)_{n \geq 1}$ i.i.d $\tau_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ pour un $\lambda > 0$. Le processus de Poisson de paramètre λ est le processus $(N_t)_{t \geq 0}$ défini par

$$N_t = \max \{n \geq 0 | T_n \leq t\} \quad \text{avec} \quad T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i.$$

L'idée est de voir τ_i comme l'arrivée de clients dans un magasin. Ainsi T_n est l'arrivée du n -ième client et N_t est le nombre de clients arrivés avant le temps t . N est appelé Processus de Poisson car le nombre d'arrivées dans un intervalle de temps suit une loi de Poisson.

PROPOSITION 2.7. Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $t \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

i.e. $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$.

Démonstration. Si $N_t = n$ alors $T_n \leq t < T_{n+1}$. Ainsi, on a nécessairement $\tau_{n+1} > t - T_n$. On peut donc écrire, comme τ_{n+1} est indépendant de T_n ,

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \int_0^t \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t - s) f_{T_n}(s) ds = \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} f_{T_n}(s) ds.$$

On rappelle alors la densité d'une somme de variables exponentielles indépendantes, qui suit une loi Γ ,

$$T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i \sim \Gamma(n, \lambda), \quad f_{T_n}(s) = \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{1}_{s \geq 0}.$$

On obtient donc

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} ds = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t s^{n-1} ds = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

□

Pour un processus de Poisson, la “matrice” (elle est de taille infinie comme l'espace des états est $\mathbb{N}$) de transition de la chaîne de Markov à temps discret associée ainsi que la générateur infinitésimal sont données par

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

La propriété de Markov nous donne le lemme suivant sur les processus de Poisson,

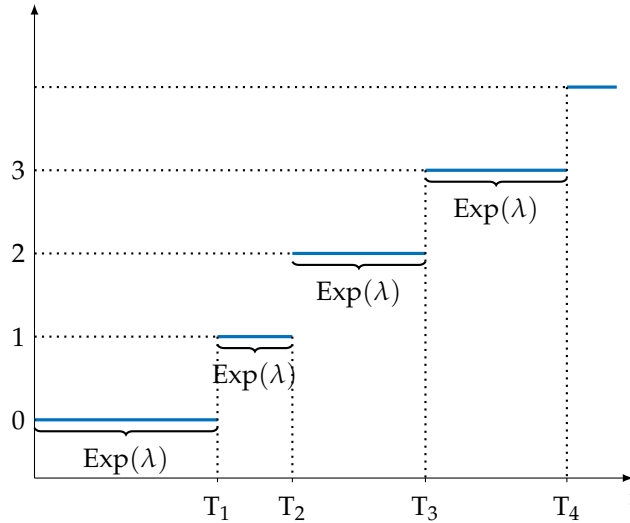


FIGURE 4 – Processus de Poisson de paramètre λ .

LEMME 2.8. Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $s \geq 0$ $\{N_{t+s} - N_t\}_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ indépendant de $\{N_u\}_{0 \leq u \leq t}$.

Démonstration. Soit $s \geq 0$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T_n \leq s < T_{n+1}$. Ainsi, on a $\tau_{n+1} = T_{n+1} - T_n > s - T_n$. Par conséquent, on peut écrire

$$\mathbb{P}(\tau_{n+1} > s - T_n + t | \tau_{n+1} > s - T_n) = \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t) = e^{-\lambda t}.$$

Donc, le premier temps de séjour de notre nouveau processus est aussi un temps exponentiel de paramètre λ . Par récurrence, on peut montrer que tous les temps de séjour sont exponentiels de paramètre λ et indépendants des temps de séjour avant s . Ainsi, le processus $\{N_{t+s} - N_t\}_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ indépendant de $\{N_u\}_{0 \leq u \leq t}$. □

Cela nous donne comme conséquence que les processus de Poisson ont des accroissements indépendants

LEMME 2.9. Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, les variables aléatoires $N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

En fait ceci nous donne une nouvelle caractérisation des processus de Poisson.

THÉORÈME 2.10

Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ si et seulement si

- $N_0 = 0$ presque sûrement,
- $(N_t)_{t \geq 0}$ a des accroissements indépendants,
- pour tout $s, t \geq 0$, $N_{t+s} - N_t \sim \text{Poisson}(\lambda s)$.

Démonstration. Nous avons déjà montré la première implication. Pour la réciproque, on peut voir que les temps entre chaque saut sont exponentiels de paramètre λ . En effet, on a

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}.$$

Ainsi, $T_1 = \tau_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$. De même, on peut voir que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_2 = T_2 - T_1 > t | T_1 = s) &= \mathbb{P}(\text{Pas d'arrivée dans } (s, s+t] | T_1 = s) \\ &= \mathbb{P}(N_{s+t} - N_s = 0 | N_u = 0 \text{ pour } u < s, N_s = 1) \\ &= \mathbb{P}(N_{s+t} - N_s = 0) = e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\tau_2 \sim \text{Exp}(\lambda)$ et indépendant de τ_1 . Par récurrence, on peut montrer que tous les temps de séjour sont exponentiels de paramètre λ et indépendants. Ainsi, $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ . $\square$

On remarque que la première définition du processus de Poisson nous donnait un processus de comptage et on voyait donc facilement que la probabilité de sauter de deux unités ou plus dans un petit intervalle de temps était nulle. Dans la deuxième définition, on n'a pas cette propriété. Cependant, on peut voir que la probabilité de sauter de deux unités ou plus dans un petit intervalle de temps est nulle. En effet, pour tout $i \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\exists t \geq 0, N_{t+} - N_t \geq 2) \leq \mathbb{P}\left(\exists k \in \{1, \dots, n\}, N_{\frac{tk}{n}} - N_{\frac{t(k-1)}{n}} \geq 2\right) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\left(\text{Poi}\left(\frac{\lambda t}{n}\right) \geq 2\right)$$

et comme $\mathbb{P}\left(\text{Poi}\left(\frac{\lambda t}{n}\right) \geq 2\right) = \left(1 - e^{-\frac{\lambda t}{n}} - \frac{\lambda t}{n} e^{-\frac{\lambda t}{n}}\right) \sim \frac{(\lambda t)^2}{2n^2}$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\left(\text{Poi}\left(\frac{\lambda t}{n}\right) \geq 2\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{(\lambda t)^2}{2n^2} = 0.$$

Ainsi, on retrouve bien que la probabilité de sauter de deux unités ou plus dans un petit intervalle de temps est nulle.

Une propriété très importante des processus de Poisson est la propriété de superposition.

THÉORÈME 2.11: Superposition des processus de Poisson

Soient $(N_t^{(i)})_{t \geq 0}, i = 1, \dots, n$ des processus de Poisson indépendants de paramètres $\lambda_i > 0$. Le processus $(N_t)_{t \geq 0}$ défini par

$$N_t = \sum_{i=1}^n N_t^{(i)}$$

est un processus de Poisson de paramètre $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Démonstration. Il est clair que $N_0 = 0$ presque sûrement. De plus, comme les processus $(N_t^{(i)})_{t \geq 0}$ ont des accroissements indépendants et sont indépendants entre eux, le processus $(N_t)_{t \geq 0}$ a aussi des accroissements indépendants. Il reste à montrer que pour tout $s, t \geq 0$, $N_{t+s} - N_t \sim \text{Poisson}(\lambda s)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = k) &= \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \mathbb{P}(N_{t+s}^{(1)} - N_t^{(1)} = k_1, \dots, N_{t+s}^{(n)} - N_t^{(n)} = k_n) \\ &= \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(N_{t+s}^{(i)} - N_t^{(i)} = k_i) \\ &= \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i s} \frac{(\lambda_i s)^{k_i}}{k_i!} \\ &= \frac{e^{-\lambda s}}{k!} \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \prod_{i=1}^n (\lambda_i s)^{k_i} \\ &= e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de la formule du multinomial. Ainsi, on a bien $N_{t+s} - N_t \sim \text{Poisson}(\lambda s)$ et le processus $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ . $\square$

Un processus de Poisson est une façon de modéliser des arrivées aléatoires *uniformes*. Cela peut se voir par la propriété de conditionnement suivante.

THÉORÈME 2.12

Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $t > 0$, conditionnellement à $N_t = n$, les instants d'arrivées $T_1, T_2, \dots, T_n$ sont distribués comme des variables aléatoires i.i.d uniformes sur $[0, t]$ ordonnées.

Démonstration. On peut voir que la densité conjointe des instants d'arrivées conditionnellement à $N_t = n$ est donnée par

$$\begin{aligned} f_{T_1, \dots, T_n | N_t = n}(t_1, \dots, t_n) &= \frac{f_{T_1, \dots, T_n, N_t}(t_1, \dots, t_n, n)}{\mathbb{P}(N_t = n)} = \frac{f_{T_1, \dots, T_n}(t_1, \dots, t_n) \mathbb{1}_{\{t_n \leq t\}}}{\mathbb{P}(N_t = n)} = \frac{\lambda^n e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t\}}}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}} \\ &= \frac{n!}{t^n} \mathbb{1}_{\{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t\}} \end{aligned}$$

qui est bien la densité des variables aléatoires i.i.d uniformes sur $[0, t]$ ordonnées. En effet, on remarque que la distribution (à part l'ordre) ne dépend pas des $t_1, \dots, t_n$. Pour obtenir la densité conjointe, on remarque que $T_i = \sum_{k=1}^i \tau_k$ où les τ_k sont i.i.d $\text{Exp}(\lambda)$. Ainsi, cela nous donne que $\tau_i = T_i - T_{i-1}$ avec $T_0 = 0$. On peut calculer le jacobien de la transformation $T_i = g_i(\tau_1, \dots, \tau_n)$,

$$J = (\partial_j g_i)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(J) = 1.$$

Ainsi, on a

$$f_{T_1, \dots, T_n}(t_1, \dots, t_n) = f_{\tau_1, \dots, \tau_n}(t_1, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1}) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})} \mathbb{1}_{\{t_i \geq t_{i-1}\}} = \lambda^n e^{-\lambda t_n} \mathbb{1}_{\{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n\}}.$$

$\square$

On voit donc que si on conditionne à avoir n arrivées dans un intervalle de temps $[0, t]$, les arrivées sont uniformément distribuées dans cet intervalle de temps. On peut en déduire le résultat suivant.

COROLLAIRE 2.13. Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soient $s < t$ et $0 \leq m < n$ alors

$$\mathbb{P}(N_s = m | N_t = n) = \binom{n}{m} \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}.$$

Conditionnellement à $N_t = n$, N_s suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{s}{t}$.

Démonstration. Conditionnellement à $N_t = n$, les instants d'arrivées $T_1, T_2, \dots, T_n$ sont distribués comme des variables aléatoires i.i.d uniformes sur $[0, t]$ ordonnées. Ainsi, la probabilité d'avoir m arrivées avant le temps s est égale à la probabilité d'avoir m variables uniformes sur $[0, t]$ inférieures à s , ce qui suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{s}{t}$ car $\mathbb{P}(\text{Unif}(0, t) < s) = \frac{s}{t}$. $\square$

2.3 Processus de Poisson composés

Lorsque l'on considérait des processus de Poisson, on considérait des temps d'arrivées, par exemple de clients, mais on peut embellir ce processus en associant à chaque arrivée une variable aléatoire représentant une caractéristique du client, par exemple le montant de son achat. On obtient ainsi un processus de Poisson composé.

DÉFINITION 2.14: Processus de Poisson composé

Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $(Y_i)_{i \geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d indépendantes de $(N_t)_{t \geq 0}$ et de loi commune F_Y . Le processus de Poisson composé $(X_t)_{t \geq 0}$ est défini par

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.$$

Par exemple, si le processus de Poisson compte des arrivées de voitures dans un parking, Y_i peut être le nombre de passagers de la i -ième voiture. On peut alors s'intéresser au nombre total de passagers dans le parking à un instant t , qui est donné par X_t . On peut calculer l'espérance et la variance du processus de Poisson composé.

PROPOSITION 2.15. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson composé avec un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et des variables aléatoires i.i.d $(Y_i)_{i \geq 0}$ de loi commune F_Y telle que $\mathbb{E}[Y_1] < \infty$ et $\mathbb{E}[Y_1^2] < \infty$. On a pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}[X_t] = \lambda t \mathbb{E}[Y_1] \quad \text{et} \quad \text{Var}(X_t) = \lambda t \mathbb{E}[Y_1^2].$$

Démonstration. On a

$$\mathbb{E}[X_t] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N_t} Y_i \middle| N_t = n \right] \mathbb{P}(N_t = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbb{E}[Y_1] \mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{E}[N_t] \mathbb{E}[Y_1] = \lambda t \mathbb{E}[Y_1].$$

De même, pour la variance, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t^2] &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right)^2 \middle| N_t = n \right] \mathbb{P}(N_t = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n \mathbb{E}[Y_1^2] + n(n-1) \mathbb{E}[Y_1]^2 \right) \mathbb{P}(N_t = n) \\ &= \mathbb{E}[N_t] \mathbb{E}[Y_1^2] + \mathbb{E}[N_t(N_t-1)] \mathbb{E}[Y_1]^2 \\ &= \lambda t \mathbb{E}[Y_1^2] + (\lambda t)^2 \mathbb{E}[Y_1]^2. \end{aligned}$$

On en déduit la variance,

$$\text{Var}(X_t) = \mathbb{E}[X_t^2] - \mathbb{E}[X_t]^2 = \lambda t \mathbb{E}[Y_1^2] + (\lambda t)^2 \mathbb{E}[Y_1]^2 - (\lambda t)^2 \mathbb{E}[Y_1]^2 = \lambda t \mathbb{E}[Y_1^2].$$

□

EXEMPLE 16. Si le nombre d'accidents par an est un processus de Poisson de paramètre 5 et que chaque accident a un coût moyen de 200\$ et un écart type de 20\$ alors le coût moyen annuel des accidents est de

$$\mathbb{E}[X_1] = 5 \times 200 = 1000\$$$

avec un écart type de

$$\sqrt{\text{Var}(X_1)} = \sqrt{5 \times (\text{Var}(Y_i) + \mathbb{E}[Y_i]^2)} = \sqrt{5 \times (400 + 40000)} = \sqrt{202000} \approx 449\$.$$

Une propriété importante des processus de Poisson composés est la propriété de décomposition. Si on considère des variables aléatoires Y_i discrètes, on peut décomposer le processus de Poisson composé en plusieurs processus de Poisson composés plus simples.

THÉORÈME 2.16: Décomposition des processus de Poisson composés

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson composé avec un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et des variables aléatoires i.i.d $(Y_i)_{i \geq 0}$ de loi commune F_Y discrète prenant ses valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable $\{a_1, a_2, \dots\}$. On définit pour tout k le processus de Poisson composé $(X_t^{(k)})_{t \geq 0}$ par

$$X_t^{(k)} = \#\{i \leq X_t, Y_i = k\}.$$

Alors, les processus $(X_t^{(k)})_{t \geq 0}$ sont des processus de Poisson de paramètre $\lambda \mathbb{P}(Y_i = a_k)$ indépendants.

Démonstration. Faisons la preuve dans le cas où Y_i prend ses valeurs dans $\{a_1, a_2\}$. On dénote $\mathbb{P}(Y_i = a_1) = p$ et $\mathbb{P}(Y_i = a_2) = 1 - p$. On peut voir que pour tout $t \geq 0$ et $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_t^{(1)} = n_1, X_t^{(2)} = n_2) &= \mathbb{P}(X_t^{(1)} = n_1, X_t^{(1)} + X_t^{(2)} = n_1 + n_2) \\ &= \mathbb{P}(X_t = n_1 + n_2) \mathbb{P}(X_t^{(1)} = n_1 | N_t = n_1 + n_2) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n_1+n_2}}{(n_1+n_2)!} \binom{n_1+n_2}{n_1} p^{n_1} (1-p)^{n_2} \\ &= \left(e^{-\lambda p t} \frac{(\lambda p t)^{n_1}}{n_1!} \right) \left(e^{-\lambda(1-p)t} \frac{(\lambda(1-p)t)^{n_2}}{n_2!} \right). \end{aligned}$$

On obtient donc bien que $X_t^{(1)} \sim \text{Poisson}(\lambda p t)$, $X_t^{(2)} \sim \text{Poisson}(\lambda(1-p)t)$ et qu'ils sont indépendants. La généralisation au cas où Y_i prend ses valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable se fait de la même manière. □

EXEMPLE 17. Supposons qu'on a des déclarations de sinistre modélisées par des processus de Poisson : ceux venant d'une assurance automobile avec un taux λ_a et ceux venant d'une assurance habitation avec un taux λ_h . Quelle est la probabilité d'avoir 6 déclarations automobile avant 4 déclarations habitation ?

En superposant les deux processus de Poisson, on obtient un processus de Poisson global de taux $\lambda = \lambda_a + \lambda_h$. On note N_t le nombre total de déclarations (automobile + habitation) jusqu'au temps t . On note A le nombre de déclarations automobile et H le nombre de déclarations habitation. Ceci revient à dire qu'on veut au moins 6 déclarations automobile dans les 9 premières déclarations totales. On voit que dans le processus avec probabilité $p = \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_h}$ une déclaration est automobile et avec probabilité $1 - p = \frac{\lambda_h}{\lambda_a + \lambda_h}$ une déclaration est habitation. Ainsi, la probabilité cherchée est

$$\sum_{k=6}^9 \binom{9}{k} p^k (1-p)^{9-k}.$$

Par exemple si $p = \frac{1}{2}$ i.e. $\lambda_a = \lambda_h$, on a $\frac{35}{128}$.

2.4 Processus de naissance de Yule

On peut considérer un autre exemple de processus de comptage avec des temps de séjour exponentiels. Il s'agit du processus de naissance de Yule. C'est un processus intéressant car on peut calculer de manière exacte ses probabilités de transition. Ce processus correspond à la description d'une évolution de population où chaque membre peut donner naissance avec probabilité $\sim \nu h$ sur un intervalle $[t, t + h]$.

DÉFINITION 2.17: Processus de naissance de Yule

Un processus de naissance de Yule de paramètre $\nu > 0$ est un processus de Markov continu à temps continu $(Y_t)_{t \geq 0}$ avec un espace d'états $\mathbb{N}^*$ et $Y_0 = 1$ et un générateur infinitésimal Q donné par

$$Q = \begin{bmatrix} -\nu & \nu & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -2\nu & 2\nu & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -3\nu & 3\nu & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -4\nu & 4\nu & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

On peut réfléchir pourquoi la description ci-dessus nous donne ce générateur infinitésimal. En effet, au début, on commence avec 1 individu et on considère un temps exponentiel de paramètre ν avant qu'il donne naissance à un nouvel individu. Ainsi, on a $Q_{1,0} = -\nu$ et $Q_{1,1} = \nu$. Après la première naissance, on a 2 individus et chacun d'eux peut donner naissance avec un temps exponentiel de paramètre ν . Ainsi, le temps avant la prochaine naissance est exponentiel de paramètre 2ν (car le minimum de deux variables exponentielles de paramètre ν est une variable exponentielle de paramètre 2ν) et on a $Q_{2,1} = -2\nu$ et $Q_{2,2} = 2\nu$. Par récurrence, on obtient le générateur infinitésimal ci-dessus. On peut calculer les probabilités de

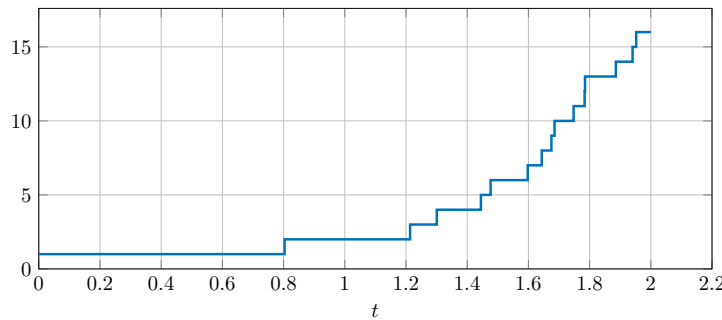


FIGURE 5 – Simulation d'un processus de naissance de Yule de paramètre $\nu = 2$.

transition de ce processus de naissance de Yule.

THÉORÈME 2.18

Soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ un processus de naissance de Yule de paramètre $\nu > 0$. Pour tout $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$p_t(i, j) = \binom{j-1}{i-1} e^{-i\nu t} (1 - e^{-\nu t})^{j-i}, \quad j \geq i.$$

Autrement dit, conditionnellement à $Y_0 = i$, Y_t suit une loi binomiale négative de paramètre i et $e^{-\nu t}$.

Démonstration. On peut en fait regarder le processus de manière inverse, on commence avec k particules qui ont une durée de vie T_i indépendante donnée par un temps exponentiel de paramètre ν . On cherche la probabilité qu'il n'y ait qu'une seule particule après un temps t . Cela revient à dire que chaque particule a donné naissance avant le temps t . Ainsi, on a

$$\mathbb{P}(Y_t > k | Y_0 = 1) = \mathbb{P}(T_1 < t, T_2 < t, \dots, T_k < t) = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}(T_j < t) = (1 - e^{-\nu t})^k.$$

Ainsi, on a

$$p_t(1, j) = \mathbb{P}(Y_t > j - 1 | Y_0 = 1) - \mathbb{P}(Y_t > j | Y_0 = 1) = e^{-\nu t} (1 - e^{-\nu t})^{j-1}.$$

On remarque que ceci correspond à une loi géométrique de paramètre $e^{-\nu t}$. Pour le cas général, on peut voir que l'on commence avec i particules indépendantes. Ainsi, on peut considérer i processus de naissance de Yule indépendants $Y_t^{(k)}$ avec $Y_0^{(k)} = 1$ pour $k = 1, \dots, i$. On a alors

$$Y_t = \sum_{k=1}^i Y_t^{(k)}.$$

Mais on peut voir que

$$\begin{aligned} p_t(i, j) &= \sum_{n_1 + \dots + n_i = j} \mathbb{P}(Y_t^{(1)} = n_1, \dots, Y_t^{(i)} = n_i | Y_0^{(1)} = \dots = Y_0^{(i)} = 1) \\ &= \sum_{n_1 + \dots + n_i = j} \prod_{k=1}^i p_t(1, n_k) \\ &= \sum_{n_1 + \dots + n_i = j} e^{-i\nu t} (1 - e^{-\nu t})^{j-i}. \end{aligned}$$

Le nombre de solutions entières positives de l'équation $n_1 + n_2 + \dots + n_i = j$ est donné par le coefficient binomial $\binom{j-1}{i-1}$ car ceci revient à placer $i-1$ séparateurs dans une série de $j-1$ éléments. Ainsi, on a bien

$$p_t(i, j) = \binom{j-1}{i-1} e^{-i\nu t} (1 - e^{-\nu t})^{j-i}.$$

□

2.5 Comportement limite

On reprend l'exemple des deux machines en parallèle avec des temps de pannes et de réparations exponentiels. On note X_t le nombre de machines en fonctionnement à l'instant t . On peut voir que $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov continu à temps continu avec un espace d'états $\{0, 1, 2\}$ et un générateur infinitésimal Q donné par

$$Q = \begin{bmatrix} -\nu & \nu & 0 \\ \mu & -(\mu + \nu) & \nu \\ 0 & 2\mu & -2\mu \end{bmatrix}.$$

Prenons un exemple $\mu = 1$ et $\nu = 2$ qui nous donne la matrice

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

On se rappelle qu'on a l'équation rétrograde de Kolmogorov

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} p_t = Q p_t \\ p_0 = I \end{cases} \Rightarrow p_t(i, j) = (e^{Q_t})_{ij}.$$

Commeçons par diagonaliser Q . Pour les valeurs propres

$$\det(Q - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 2 & 0 \\ 1 & -3 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda + 2)(\lambda + 5),$$

on a donc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = -5$. Pour les vecteurs propres, on trouve

$$Qu = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2u_1 + 2u_2 = 0 \\ u_1 - 3u_2 + 2u_3 = 0 \\ 2u_2 - 2u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 = u_2 = u_3 \text{ par exemple } u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De même, on trouve

$$Qu = -2u \Rightarrow \begin{cases} -2u_1 + 2u_2 = -2u_1 \\ u_1 - 3u_2 + 2u_3 = -2u_2 \\ 2u_2 - 2u_3 = -2u_3 \end{cases} \Rightarrow u_2 = 0, u_1 = -2u_3 \text{ par exemple } u = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finalement, on trouve

$$Qu = -5u \Rightarrow \begin{cases} -2u_1 + 2u_2 = -5u_1 \\ u_1 - 3u_2 + 2u_3 = -5u_2 \\ 2u_2 - 2u_3 = -5u_3 \end{cases} \Rightarrow 3u_1 = -2u_2, u_1 = u_3 \text{ par exemple } u = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

On obtient donc la matrice de vecteurs propres

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ et } U^{-1} = -\frac{1}{15} \begin{bmatrix} -3 & -6 & -6 \\ 5 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

et on a donc

$$Q = U \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} U^{-1} \Rightarrow P_t = e^{Qt} = U \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} U^{-1}.$$

On remarque qu'on peut donc calculer la limite de la matrice P_t lorsque $t \rightarrow \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t = U \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ -5 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, on remarque que la limite ne dépend pas de l'état initial. Cela nous rappelle la convergence vers la distribution stationnaire dans le cas des chaînes de Markov à temps discret. Nous allons voir que la même chose se passe dans ce cas à temps continu.

DÉFINITION 2.19

Une chaîne de Markov à temps continu X est dite irréductible si pour tous états i, j , il est possible d'aller de i à j en un nombre fini d'étapes que l'on peut aussi écrire comme il existe $n \in \mathbb{N}$ et $k_0 = i, k_1, \dots, k_n = j$ tels que $Q_{k_m, k_{m+1}} > 0$ pour tout $m = 0, \dots, n-1$.

Dec ette définition, on peut énoncer le lemme suivant

LEMME 2.20. Si X est irréductible et $t > 0$ alors $p_t(i, j) > 0$ pour tous états i, j .

Démonstration. On connaît l'existence de $i = k_0, k_1, \dots, k_n = j$ tels que $Q_{k_m, k_{m+1}} > 0$ pour tout $m = 0, \dots, n-1$. On peut choisir $h > 0$ tel que $t > nh$. On a alors

$$p_{nh}(i, j) \geq p_h(i, k_1) p_h(k_1, k_2) \cdots p_h(k_{n-1}, j) > 0.$$

En effet, on peut voir que $p_h(k_m, k_{m+1}) > 0$ car $Q_{k_m, k_{m+1}} > 0$ puisque par définition de Q

$$Q_{k_\ell, k_{\ell+1}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_h(k_\ell, k_{\ell+1})}{h}.$$

Maintenant, on a

$$p_t(i, j) \geq p_{nh}(i, j) p_{t-nh}(j, j) \geq p_{nh}(i, j) e^{-\lambda_i(t-nh)} > 0.$$

□

Nous n'avons pas de matrice de transition en un pas comme dans le cas discret qui nous donnerait la définition de la distribution stationnaire. Cependant, on peut définir la distribution stationnaire de la manière suivante.

DÉFINITION 2.21: Distribution stationnaire

Une distribution π est dite stationnaire pour une chaîne de Markov à temps continu si pour tout $t > 0$, on a

$$\pi P_t = \pi \quad \text{i.e.} \quad \forall i, j \in S, \sum_{i \in S} \pi_i P_t(i, j) = \pi_j.$$

Cette définition n'est pas facile à utiliser car elle fait intervenir la matrice de transition à un temps t quelconque. Cependant, on peut montrer le résultat suivant qui nous permet de caractériser la distribution stationnaire en fonction du générateur infinitésimal.

THÉORÈME 2.22

Soit π une distribution de probabilité. La distribution π est stationnaire si et seulement si

$$\pi Q = 0 \quad \text{i.e.} \quad \forall j \in S, \sum_{i \in S} \pi_i Q_{i,j} = 0.$$

Démonstration. Supposons que π est stationnaire. On a donc pour tout $t > 0$,

$$\pi P_t = \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\pi P_t) = 0.$$

Mais on a

$$\frac{d}{dt}(\pi P_t) = \pi \frac{d}{dt} P_t = \pi Q P_t.$$

En prenant $t = 0$, on obtient bien $\pi Q = 0$. Réciproquement, supposons que $\pi Q = 0$. On a

$$\frac{d}{dt}(\pi P_t) = \pi Q P_t = 0.$$

Ainsi, πP_t est constante par rapport à t et en prenant $t = 0$, on obtient bien $\pi P_t = \pi$. □

EXEMPLE 18. Si on reprend l'exemple des deux machines en parallèle avec $\mu = 1$ et $\nu = 2$, on peut chercher la distribution stationnaire $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$. On doit résoudre le système

$$\begin{cases} -2\pi_0 + \pi_1 = 0 \\ 2\pi_0 - 3\pi_1 + 2\pi_2 = 0 \\ 2\pi_1 - 2\pi_2 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = \pi_2 \\ \pi_0 = \frac{1}{2}\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1. \end{cases}$$

On trouve $\pi = (\frac{\pi_2}{2}, \pi_2, \pi_2)$ et ainsi $\pi_2 = \frac{2}{5}$. Finalement, on a

$$\pi = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right).$$

On remarque qu'on avait trouvé la même distribution en calculant la limite de P_t lorsque $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_t(i, j) = \pi_j.$$

Le comportement limite des chaînes de Markov à temps continu est donné par le théorème suivant.

THÉORÈME 2.23

Soit X une chaîne de Markov à temps continu irréductible possédant une distribution stationnaire π . Alors, pour tout état i, j , on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_t(i, j) = \pi_j.$$

Démonstration. Soit $h > 0$ alors si $P = P_h$ et $\tilde{X}$ la chaîne de Markov à temps discret de matrice de transition P alors $\tilde{X}$ est irréductible, apériodique puisque $P_{ij} > 0$ pour tous i, j et possède la même distribution stationnaire π . Ainsi, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j) = \pi_j.$$

Mais on a

$$P^n = P_{nh} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_{nh}(i, j) = \pi_j.$$

Prenons $h = 2^{-k}$. Soient $\varepsilon, t > 0$ alors il existe n_k tel que $\frac{n_k}{2^k} < t \leq \frac{n_k+1}{2^k}$ et on a

$$|p_t(i, j) - \pi_j| \leq \left| p_t(i, j) - p_{\frac{n_k}{2^k}}(i, j) \right| + \left| p_{\frac{n_k}{2^k}}(i, j) - \pi_j \right| \leq \varepsilon$$

par continuité des probabilités de transition. En effet il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, on a

$$\left| p_t(i, j) - p_{\frac{n_k}{2^k}}(i, j) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n_k \geq N$ (i.e t suffisamment grand), on a

$$\left| p_{\frac{n_k}{2^k}}(i, j) - \pi_j \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit le résultat. □

Tout comme les chaînes de Markov à temps discret, nous pouvons définir la notion de mesure réversible qui nous permet de trouver la distribution stationnaire plus facilement dans certains cas.

DÉFINITION 2.24: Mesure réversible

Une mesure de probabilité π est dite réversible pour une chaîne de Markov à temps continu si pour tous états i, j , on a

$$\pi_i Q_{i,j} = \pi_j Q_{j,i}.$$

On a alors le résultat suivant

THÉORÈME 2.25

Soit π une mesure réversible pour une chaîne de Markov à temps continu. Alors, π est une distribution stationnaire.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\pi Q = 0$. En effet, on a pour tout j ,

$$\sum_{i \in S} \pi_i Q_{i,j} = \sum_{i \in S} \pi_j Q_{j,i} = \pi_j \sum_{i \in S} Q_{j,i} = 0.$$

□

EXEMPLE 19. On considère 3 machines fonctionnant en parallèle. Elle fonctionne en moyenne 60 jours avant une panne. Un réparateur vient alors la réparer et met en moyenne 4 jours pour réparer une machine. En

grand temps, quelle est la fraction de temps où les 3 machines fonctionnent ?

On définit la chaîne de Markov à temps continu $(X_t)_{t \geq 0}$ où X_t est le nombre de machines en fonctionnement à l'instant t sur $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Commençons par construire le générateur infinitésimal Q . On a les transitions suivantes :

- Si $X_t = 0$ alors une machine peut être réparée avec un temps exponentiel de paramètre $\frac{1}{4}$. Ainsi, $Q_{0,1} = \frac{1}{4}$ et $Q_{0,0} = -\frac{1}{4}$.
- Si $X_t = 1$ alors une machine peut tomber en panne avec un temps exponentiel de paramètre $\frac{1}{60}$ et une machine peut être réparée avec un temps exponentiel de paramètre $\frac{1}{4}$. Ainsi, $Q_{1,0} = \frac{1}{60}$, $Q_{1,2} = \frac{1}{4}$ et $Q_{1,1} = -\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{4}{15}$.
- Si $X_t = 2$ alors deux machines peuvent tomber en panne avec un temps exponentiel de paramètre $\frac{2}{60}$ et une machine peut être réparée avec un temps exponentiel de paramètre $\frac{1}{4}$. Ainsi, $Q_{2,1} = \frac{2}{60}$, $Q_{2,3} = \frac{1}{4}$ et $Q_{2,2} = -\left(\frac{2}{60} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{17}{60}$.
- Si $X_t = 3$ alors trois machines peuvent tomber en panne avec un temps exponentiel de paramètre $\frac{3}{60}$. Ainsi, $Q_{3,2} = \frac{3}{60}$ et $Q_{3,3} = -\frac{3}{60}$.

On obtient donc la matrice

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{60} & -\frac{4}{15} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{30} & -\frac{17}{60} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{20} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix}.$$

On cherche une mesure réversible $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$. On choisit π_0 comme paramètre et on a

$$\pi_1 Q_{10} = \pi_0 Q_{01} \rightarrow \pi_1 = 15\pi_0.$$

De même, on a

$$\pi_2 Q_{21} = \pi_1 Q_{12} \rightarrow \pi_2 = \frac{30}{4} \pi_1 = \frac{225}{2} \pi_0,$$

et

$$\pi_3 Q_{32} = \pi_2 Q_{23} \rightarrow \pi_3 = 5\pi_2 = \frac{1125}{2} \pi_0.$$

On obtient π_0 avec $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ qui nous donne $\pi_0 = \frac{1}{691}$ et on obtient la distribution stationnaire

$$\pi = \left(\frac{1}{691}, \frac{15}{691}, \frac{225}{1382}, \frac{1125}{1382} \right).$$

Ainsi, comme $\lim_{t \rightarrow \infty} p_t(i, j) = \pi_j$ (on vérifie facilement que X est irréductible), la fraction de temps où les 3 machines fonctionnent est $\pi_3 = \frac{1125}{1382} \approx 0.814$. Les trois machines fonctionnent donc 81,4% du temps en grand temps.

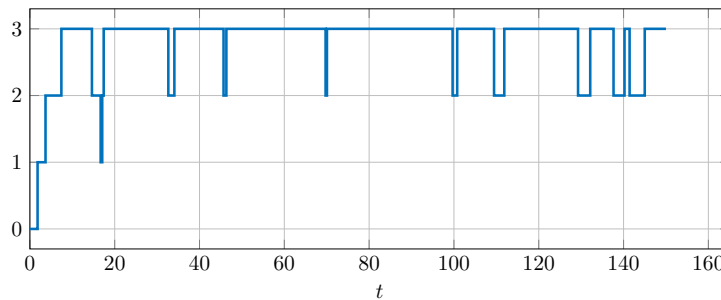


FIGURE 6 – Simulation de X sur 150 jours.

Tout comme les chaînes de Markov à temps discret, nous pouvons définir les notions de récurrence, transience et positivité pour les chaînes de Markov à temps continu. Les définitions sont les mêmes que dans le cas discret en remplaçant la matrice de transition P par la matrice de transition P_t pour un $t > 0$ quelconque. Cela nous donne de la même façon ce théorème que nous donnons sans preuve

THÉORÈME 2.26

Une chaîne de Markov irréductible est récurrente positive si et seulement si elle possède une distribution stationnaire. Dans ce cas, la distribution stationnaire est unique et vérifie pour tout état i ,

$$\pi_i = \frac{1}{\lambda_i \mathbb{E} [\inf\{t \geq T_1, X_t = i\} | X_0 = i]}$$

où T_1 est le temps de la première transition. En particulier, on a bien $\pi_i > 0$ pour tout état i .

Comme on a $p_t(i, j) \rightarrow \pi_j$, on remarque qu'en grand temps, la fraction de temps passé au temps j est le temps moyen de séjour en j donné par $\frac{1}{\lambda_j}$ divisé par le temps de retour en j .

3. PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT

3.1 Définition et théorèmes limites

Les processus de renouvellement sont une généralisation des processus de Poisson où les temps entre deux événements successifs ne sont plus exponentiels mais suivent une loi générale. On peut penser à un système où des pièces sont remplacées lorsqu'elles tombent en panne. Le temps de vie des pièces suit une loi générale et on remplace la pièce dès qu'elle tombe en panne.

DÉFINITION 3.1: Processus de renouvellement

Soit $(t_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. positives. On définit le processus de renouvellement $(N_t)_{t \geq 0}$ associé à $(t_n)_{n \geq 1}$ par

$$N_t = \max\{n \geq 0, T_n \leq t\} \quad \text{où} \quad T_n = \sum_{k=1}^n t_k.$$

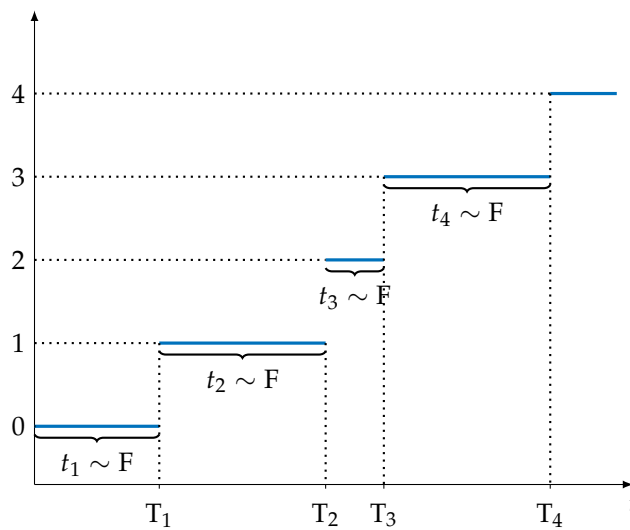


FIGURE 7 – Processus de renouvellement avec des temps entre événements suivant la distribution $\mathbb{P}(t_i \leq t) = F(t)$.

On remarque que si les variables aléatoires $(t_n)_{n \geq 1}$ suivent une loi exponentielle de paramètre λ alors le processus de renouvellement $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ . La structure spéci-

fique des processus de Poisson permet d'obtenir des propriétés particulières qui ne sont pas vérifiées par les processus de renouvellement généraux. Par exemple, les processus de Poisson possèdent la propriété de manque de mémoire qui n'est pas vérifiée en général pour les processus de renouvellement. Nous commençons par voir un résultat sur la limite d'un processus de renouvellement.

THÉORÈME 3.2

Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de renouvellement associé à une suite de variables aléatoires i.i.d. positives $(t_n)_{n \geq 1}$. Alors,

$$\mathbb{P} \left(N_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty \right) = 1.$$

Démonstration. On remarque tout d'abord que pour tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto N_t(\omega)$ est une fonction croissante. Ainsi la limite $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t(\omega)$ existe dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Montrons que cette limite est infinie presque sûrement. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$N_t = \max\{n \geq 0, T_n \leq t\} \geq n \Leftrightarrow T_n \leq t.$$

Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_t < n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_n > t) = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_n \leq t).$$

Or comme les t_i sont des variables aléatoires sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $T_n = \sum_{i=1}^n t_i \in \mathbb{R}_+^*$ presque sûrement. Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_n \leq t) = 1 \quad \text{et donc} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_t < n) = 0.$$

Par la continuité des mesures de probabilité comme $(\{N_t < n\})_{t \geq 0}$ est une suite d'événements décroissants, on obtient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_t < n) = \mathbb{P} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \{N_t < n\} \right) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{t \geq 0} \{N_t < n\} \right) = 0$$

En prenant la réunion sur tous les $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{t \geq 0} \{N_t < n\} \right) = 0$$

et donc

$$\mathbb{P} \left(N_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty \right) = \mathbb{P}(\forall n \in \mathbb{N}, \exists t \geq 0, N_t \geq n) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \geq 0} \{N_t \geq n\} \right) = 1.$$

□

Cependant, on peut énoncer le théorème suivant qui nous donne le comportement limite des processus de renouvellement.

THÉORÈME 3.3: Théorème de renouvellement

Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de renouvellement associé à une suite de variables aléatoires i.i.d. positives $(t_n)_{n \geq 1}$ de loi F telle que $\mu = \mathbb{E}[t_1] < \infty$. Alors, on a si $\mathbb{P}(t_i > 0) > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\mu} \right) = 1$$

On rappelle la loi forte des grands nombres qui nous sera utile pour la preuve.

THÉORÈME 3.4: Loi forte des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Alors,

$$\mathbb{P} \left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[X_1] \right) = 1.$$

Preuve du théorème de renouvellement. On a par définition de N_t ,

$$T_{N_t} \leq t < T_{N_t+1}.$$

En divisant par N_t (qui tend vers l'infini lorsque $t \rightarrow \infty$), on obtient

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} < \frac{T_{N_t+1}}{N_t} = \frac{T_{N_t+1}}{N_t+1} \frac{N_t+1}{N_t}.$$

Par la loi forte des grands nombres, on a

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mu \quad \text{et} \quad \frac{T_{N_t+1}}{N_t+1} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mu.$$

Ainsi, par le théorème des gendarmes, on obtient

$$\frac{t}{N_t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mu \quad \Rightarrow \quad \frac{N_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\mu}.$$

□

On peut aussi définir un processus de renouvellement composé où on ajoute une “récompense” à chaque renouvellement. Pour chaque temps t_i , on associe une variable aléatoire r_i qui représente la récompense obtenue au temps T_i . On définit alors le processus de renouvellement composé $(R_t)_{t \geq 0}$ par

$$R_t = \sum_{i=1}^{N_t} r_i.$$

On peut par exemple voir r_i comme le prix d'un sinistre pour une compagnie d'assurance et t_i comme le temps entre deux sinistres successifs. On peut alors énoncer le théorème suivant qui nous donne le comportement limite du processus de renouvellement composé.

THÉORÈME 3.5

Soit $(R_t)_{t \geq 0}$ un processus de renouvellement composé associé à une suite de variables aléatoires i.i.d. positives $(t_n)_{n \geq 1}$ de loi F telle que $\mu = \mathbb{E}[t_1] < \infty$ et une suite de variables aléatoires i.i.d. $(r_n)_{n \geq 1}$ indépendantes de $(t_n)_{n \geq 1}$ telles que $\mathbb{E}[|r_1|] < \infty$. Alors, on a si $\mathbb{P}(t_i > 0) > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\frac{R_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\mathbb{E}[r_1]}{\mu} \right) = 1.$$

Démonstration. On a

$$\frac{R_t}{t} = \frac{R_t}{N_t} \cdot \frac{N_t}{t}.$$

Par la loi forte des grands nombres, on a

$$\frac{R_t}{N_t} = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} r_i \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[r_1]$$

et par le théorème de renouvellement, on a

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\mu}.$$

Ainsi, on obtient le résultat. □

EXEMPLE 20. On suppose qu'une voiture fonctionne pendant un temps $\text{Unif}(0, 10)$ et que le coût d'une nouvelle voiture est de $A = 10$ (par exemple en milliers de dollars) en comptant le prix d'échange de notre voiture et que le coût de réparation est de $B = 3$ (en milliers de dollars). On achète une voiture dès que la précédente tombe en panne ou qu'elle a atteint $T < 10$ années. Si elle tombe en panne avant T , on doit la

réparer avant de l'échanger et nous devons payer B supplémentaires. Comment trouver le meilleur temps T qui nous minimise le coût moyen annuel?

Ici, les t_i sont les temps entre deux achats de voiture. On veut calculer leur espérance en fonction de T. On voit que si la durée de vie X de la voiture est plus petite que T alors on a $t_i = X$ et si $X > T$ alors on a $t_i = T$. Ainsi, on a

$$\mathbb{E}[t_i] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X \leq T}] + T\mathbb{P}(X > T).$$

Comme $X \sim \text{Unif}(0, 10)$, on a

$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X \leq T}] = \int_0^T \frac{x}{10} dx = \frac{T^2}{20} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X > T) = \frac{10 - T}{10}.$$

Ainsi, on obtient

$$\mathbb{E}[t_i] = \frac{T^2}{20} + T \cdot \frac{10 - T}{10} = \frac{T^2}{20} + T - \frac{T^2}{10} = T - \frac{T^2}{20}.$$

Maintenant, on calcule l'espérance du coût r_i où on a

$$r_i = \begin{cases} A + B & \text{si } X \leq T \\ A & \text{si } X > T \end{cases}.$$

Ainsi, on a

$$\mathbb{E}[r_i] = (A + B)\mathbb{P}(X \leq T) + A\mathbb{P}(X > T) = (A + B)\frac{T}{10} + A \cdot \frac{10 - T}{10} = 10 + \frac{3T}{10}.$$

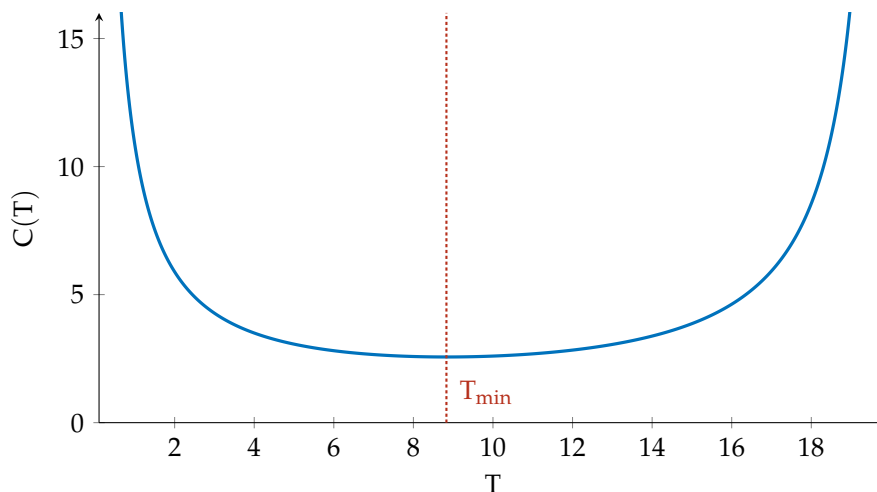
On cherche donc à minimiser le coût moyen annuel

$$C(T) = \frac{\mathbb{E}[r_i]}{\mathbb{E}[t_i]} = \frac{10 + \frac{3T}{10}}{T - \frac{T^2}{20}}.$$

On calcule la dérivée

$$C'(T) = \frac{\frac{3}{200}T^2 + T - 10}{\left(T - \frac{T^2}{20}\right)^2}$$

et on trouve que $C'(T) = 0$ lorsque $T = \frac{100}{3} \left(-1 \pm 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$. Comme T doit être positif, on choisit $T_{\min} = \frac{100}{3} \left(-1 + 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right) \approx 8.83$ années. Ainsi, pour minimiser le coût moyen annuel, il faut changer de voiture tous les 8.83 ans.



3.2 Âge et temps de vie résiduel

Soit N un processus de renouvellement associé à une suite de variables aléatoires i.i.d. positives $(t_n)_{n \geq 1}$. On définit l'âge A_t du processus de renouvellement au temps t par

$$A_t = t - T_{N_t}.$$

C'est le temps écoulé depuis le dernier renouvellement avant le temps t . De même, on définit le temps de vie résiduel Z_t du processus de renouvellement au temps t par

$$Z_t = T_{N_t+1} - t.$$

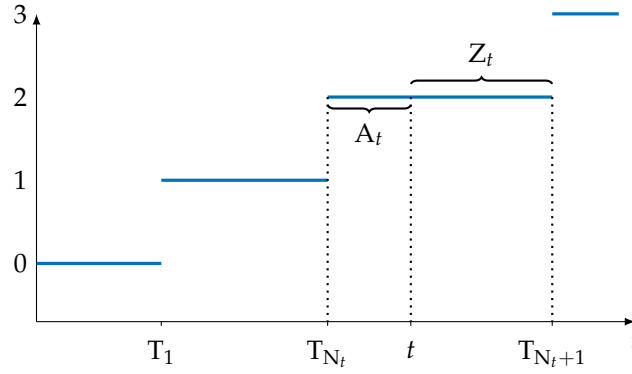


FIGURE 8 – Âge A_t et temps de vie résiduel Z_t d'un processus de renouvellement au temps t .

On a le théorème suivant qui nous donne la distribution limite jointe de l'âge et du temps de vie résiduel en moyenne.

THÉORÈME 3.6

Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de renouvellement associé à une suite de variables aléatoires i.i.d. positives $(t_n)_{n \geq 1}$ de loi F telle que $\mu = \mathbb{E}[t_1] < \infty$. Alors, on a si $\mathbb{P}(t_i > 0) > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_{A_s > a} \mathbb{1}_{Z_s > z} ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\mu} \int_{a+z}^{\infty} \mathbb{P}(t_1 > z) dz \right) = 1.$$

Démonstration. On a si T_i sont les temps de saut

$$\int_{T_{i-1}}^{T_i} \mathbb{1}_{A_s > a} \mathbb{1}_{Z_s > z} ds = \begin{cases} 0 & \text{si } t_i \leq a + z \\ t_i - (a + z) & \text{sinon} \end{cases} =: (t_i - (a + z))_+.$$

Ainsi, on peut écrire

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_{A_s > a} \mathbb{1}_{Z_s > z} ds = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N_t} (t_i - (a + z))_+ + \frac{1}{t} \int_{T_{N_t}}^t \mathbb{1}_{A_s > a} \mathbb{1}_{Z_s > z} ds.$$

Mais le premier terme consiste en un processus de renouvellement composé avec des récompenses $r_i = (t_i - (a + z))_+$. Ainsi, par le théorème sur les processus de renouvellement composés, on a

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N_t} (t_i - (a + z))_+ \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\mathbb{E}[(t_1 - (a + z))_+]}{\mu}.$$

Or, on a

$$\mathbb{E}[(t_1 - (a + z))_+] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}((t_1 - (a + z))_+ > z) dz = \int_{a+z}^{\infty} \mathbb{P}(t_1 > z) dz.$$

Nous devons maintenant montrer que le second terme tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. On a

$$\left| \frac{1}{t} \int_{T_{N_t}}^t \mathbb{1}_{A_s > a} \mathbb{1}_{Z_s > z} ds \right| \leq \frac{1}{t} (t - T_{N_t}) \leq \frac{t_{N_t+1}}{t}.$$

Par la loi forte des grands nombres, on a

$$\frac{t_{N_t+1}}{t} = \frac{t_{N_t+1}}{N_t + 1} \cdot \frac{N_t + 1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \times \frac{1}{\mu} = 0.$$

Ici on utilise la loi des grands nombres pour dire que

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} t_i \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mu$$

et ainsi

$$\frac{t_{N_t+1}}{N_t + 1} = \frac{T_{N_t+1} - T_{N_t}}{N_t + 1} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mu - \mu = 0.$$

□

En prenant $a = 0$, on peut retrouver la limite de la fonction de répartition du temps de vie résiduel en moyenne définie par

$$\bar{F}_Z(t, z) := \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}(Z_s \leq z) ds \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu} \int_0^z \mathbb{P}(t_1 > u) du.$$

En dérivant, on peut retrouver une densité limite en moyenne de Z ,

$$\bar{f}_Z(t, z) = \partial_z \bar{F}_Z(t, z) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(t_1 > z)}{\mu} \mathbb{1}_{z \geq 0} =: \bar{f}(z).$$

De la même façon, en prenant $z = 0$, on peut retrouver la limite de la fonction de répartition de l'âge en moyenne définie par

$$\bar{F}_A(t, a) := \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}(A_s \leq a) ds \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu} \int_0^a \mathbb{P}(t_1 > u) du.$$

En dérivant, on peut retrouver une densité limite en moyenne de A ,

$$\bar{f}_A(t, a) = \partial_a \bar{F}_A(t, a) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(t_1 > a)}{\mu} \mathbb{1}_{a \geq 0} =: \bar{f}(a)$$

On remarque que les densités limites en moyenne de l'âge et du temps de vie résiduel sont égales. Cela signifie qu'en moyenne, l'âge et le temps de vie résiduel ont la même distribution en grand temps. On peut ainsi calculer l'espérance limite en moyenne de l'âge (ou du temps de vie résiduel) par

$$\mathbb{E}[\bar{A}] = \mathbb{E}[\bar{Z}] = \int_0^\infty x \bar{f}(x) dx = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty x \mathbb{P}(t_1 > x) dx = \frac{\mathbb{E}[t_1^2]}{2\mu}$$

où on a utilisé le calcul

$$\int_0^\infty x \mathbb{P}(t_1 > x) dx = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty x \mathbb{1}_{t_1 > x} dx \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^{t_1} x dx \right] = \mathbb{E} \left[\frac{t_1^2}{2} \right].$$

On remarque que l'espérance limite en moyenne de l'âge (ou du temps de vie résiduel) est supérieure ou égale à la moitié de l'espérance des temps entre deux renouvellements. En effet, on sait que si t_1 n'est pas constant presque sûrement, alors sa variance est strictement positive,

$$\text{Var}(t_1) > 0 \iff \mathbb{E}[t_1^2] - \mathbb{E}[t_1]^2 > 0 \iff \mathbb{E}[t_1^2] > \mathbb{E}[t_1]^2.$$

En particulier, si on considère $L_t = A_t + Z_t$ qui correspond au temps de renouvellement alors en moyenne,

l'espérance limite $\mathbb{E}[\bar{L}] = \mathbb{E}[\bar{A}] + \mathbb{E}[\bar{Z}] > \mathbb{E}[t_{N_t}]$ même si $L_t = t_{N_t}$. Cela signifie que lorsque les temps entre deux renouvellements sont variables, l'âge et le temps de vie résiduel sont en moyenne plus grands que la moitié de l'espérance des temps entre deux renouvellements. C'est ce qu'on appelle le paradoxe de l'attente. Ce n'est pas complètement surprenant si on pense au fait que si on arrive à un instant aléatoire, on a plus de chances d'arriver pendant une longue durée de vie plutôt que pendant une courte durée de vie. Ainsi, la durée de vie résiduelle sera en moyenne plus grande que la moitié de l'espérance des temps entre deux renouvellements.

On peut aussi obtenir la densité limite jointe en moyenne de l'âge et du temps de vie résiduel par

$$\bar{f}_{A,Z}(t, a, z) = \partial_a \partial_z \bar{F}_{A,Z}(t, a, z) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\partial_z \mathbb{P}(t_1 > a + z)}{\mu} \mathbb{1}_{a \geq 0, z \geq 0} =: \bar{f}(a, z).$$

Ainsi, si t_1 possède une densité g , on a

$$\bar{f}(a, z) = \frac{g(a + z)}{\mu} \mathbb{1}_{a \geq 0, z \geq 0}.$$

On remarque que l'âge et le temps de vie résiduel ne sont pas indépendants dans le cas général.

EXEMPLE 21. Si les temps entre deux renouvellements suivent une loi exponentielle de paramètre λ , on a

$$\bar{f}(a, z) = \frac{\lambda e^{-\lambda(a+z)}}{\frac{1}{\lambda}} \mathbb{1}_{a \geq 0, z \geq 0} = \lambda^2 e^{-\lambda(a+z)} \mathbb{1}_{a \geq 0, z \geq 0} = \lambda e^{-\lambda a} \mathbb{1}_{a \geq 0} \cdot \lambda e^{-\lambda z} \mathbb{1}_{z \geq 0}.$$

Ainsi, dans le cas des processus de Poisson, l'âge et le temps de vie résiduel sont indépendants et suivent une loi exponentielle de paramètre λ .

Si les temps entre deux renouvellements suivent une loi uniforme sur $[0, b]$, on a la densité jointe limite en moyenne

$$\bar{f}(a, z) = \frac{\frac{1}{b} \mathbb{1}_{a+z < b}}{\frac{b}{2}} \mathbb{1}_{a \geq 0, z \geq 0} = \frac{2}{b^2} \mathbb{1}_{a+z < b} \mathbb{1}_{a \geq 0, z \geq 0}.$$

On remarque que A et Z ne sont pas indépendants dans ce cas. Si on veut la densité limite en moyenne de A (ou de Z), on a

$$\bar{f}(a) = \int_0^\infty \bar{f}(a, z) dz = \int_0^{b-a} \frac{2}{b^2} dz = \frac{2(b-a)}{b^2} \mathbb{1}_{0 \leq a \leq b}.$$

3.3 Processus semi-markoviens

On peut définir une généralisation des processus de renouvellement appelés processus semi-markoviens.

DÉFINITION 3.7

On se place sur un espace d'états S . Un processus semi-markovien est défini de la façon suivante :

- On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sur S de matrice de transition $P = (P_{ij})_{i,j \in S}$.
- On associe à chaque état $i \in S$ une loi de distribution F_i sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On définit les temps de saut $(T_n)_{n \geq 0}$ par $T_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$T_n = T_{n-1} + t_{X_{n-1}}^{(n)}$$

où $(t_i^{(n)})_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi F_i indépendante de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$.

- On définit le processus semi-markovien $(Y_t)_{t \geq 0}$ par

$$Y_t = X_{N_t} \quad \text{avec} \quad N_t = \max\{n \geq 0, T_n \leq t\}.$$

Les processus semi-markoviens généralisent les chaînes de Markov en temps continu. En effet, si on choisit des lois exponentielles pour les F_i , on retrouve des chaînes de Markov en temps continu. On peut énoncer un théorème de renouvellement pour les processus semi-markoviens qui donne la proportion limite du temps passé dans un état $i \in S$.

THÉORÈME 3.8

Soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ un processus semi-markovien associé à une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sur un espace d'états S de matrice de transition $P = (P_{ij})_{i,j \in S}$ et des lois de distribution $(F_i)_{i \in S}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ est irréductible et positive récurrente de distribution stationnaire $\pi = (\pi_i)_{i \in S}$ alors, on a si pour tout $i \in S$, $\mu_i = \mathbb{E}[t_i^{(1)}] < \infty$ et $\mathbb{P}(t_i^{(1)} > 0) > 0$,

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_{Y_s=i} ds \right] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\pi_i \mu_i}{\sum_{j \in S} \pi_j \mu_j}$$

4. INTRODUCTION À LA THÉORIE DES MARTINGALES

Avant de voir la définition des martingales, nous allons donner des rappels ainsi que des propriétés de l'espérance conditionnelle.

4.1 Espérance conditionnelle

Soit A un événement, on rappelle la définition de la fonction indicatrice

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut ainsi définir l'espérance d'une variable aléatoire sur A par

$$\mathbb{E}[X; A] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_A].$$

On peut ainsi définir l'espérance conditionnelle de X sachant A .

DÉFINITION 4.1

Soit X une variable aléatoire intégrable et A un événement tel que $\mathbb{P}(A) > 0$. On définit l'espérance conditionnelle de X sachant A par

$$\mathbb{E}[X|A] = \frac{\mathbb{E}[X; A]}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A]}{\mathbb{P}(A)}.$$

Par exemple si X est une variable aléatoire indépendante de A , on a pour tout $B \subset \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[X; A] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X] \mathbb{P}(A) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X|A] = \mathbb{E}[X].$$

On remarque que l'espérance conditionnelle est linéaire, c'est-à-dire que pour toutes variables aléatoires intégrables X et Y , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et un événement A tel que $\mathbb{P}(A) > 0$, on a

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y; A] = \mathbb{E}[(\alpha X + \beta Y) \mathbb{1}_A] = \alpha \mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] + \beta \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_A] = \alpha \mathbb{E}[X; A] + \beta \mathbb{E}[Y; A]$$

et ainsi

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y|A] = \alpha \mathbb{E}[X|A] + \beta \mathbb{E}[Y|A].$$

LEMME 4.2. SI $B = \bigsqcup_{i=1}^k A_i$ où $\bigsqcup$ est une réunion disjointe et $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $i = 1, \dots, k$, alors on

a

$$\mathbb{E}[X|B] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}[X|A_i] \mathbb{P}(A_i|B) = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}[X|A_i] \frac{\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)}.$$

THÉORÈME 4.3

On a

$$\mathbb{E}[X; B] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B] = \mathbb{E}\left[X \sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{A_i}\right] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A_i}] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}[X; A_i].$$

Ainsi, on obtient

$$\mathbb{E}[X|B] = \frac{\mathbb{E}[X; B]}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i=1}^k \frac{\mathbb{E}[X; A_i]}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}[X|A_i] \frac{\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}[X|A_i] \mathbb{P}(A_i|B).$$

En particulier, si $B = \Omega$, on retrouve la formule de l'espérance totale

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}[X|A_i] \mathbb{P}(A_i).$$

Si on peut écrire $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ où $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $i \geq 1$ alors on peut définir l'espérance conditionnelle de X sachant $A_1, \dots, A_n$ par pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{E}[X|A_1, \dots, A_n](\omega) := \mathbb{E}[X|A_i] \quad \text{si } \omega \in A_i.$$

On remarque alors la propriété suivant.

PROPOSITION 4.4. Soit X une variable aléatoire intégrable et $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ où $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $i \geq 1$. Alors, on a

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|A_1, \dots, A_n]] = \mathbb{E}[X].$$

Démonstration. On a

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|A_1, \dots, A_n]] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X|A_i] \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}[X; A_i]}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X; A_i] = \mathbb{E}[X].$$

□

On remarque aussi que si $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ où $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $i \geq 1$ et si X est constant sur chaque A_i , c'est-à-dire qu'il existe une suite $(x_i)_{i \geq 1}$ telle que pour tout $i \geq 1$, $X(\omega) = x_i$ pour tout $\omega \in A_i$, alors on a pour Y une autre variable aléatoire

$$\mathbb{E}[XY|A_1, \dots, A_n] = \mathbb{E}[XY|A_1, \dots, A_n] \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[XY|A_i] \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[XY|A_i] \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}[XY \mathbb{1}_{A_i}]}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbb{1}_{A_i}$$

et en utilisant le fait que X est constant sur chaque A_i , on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY|A_1, \dots, A_n] &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_{A_i}]}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{E}[Y|A_i] \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{1}_{A_i} \mathbb{E}[Y|A_1, \dots, A_n] \\ &= X \mathbb{E}[Y|A_1, \dots, A_n]. \end{aligned}$$

C'est une propriété importante qui sera utilisée pour la définition des martingales.

4.2 Définition des martingales

Il faut voir une martingale comme la fortune au temps n d'un joueur qui joue à un jeu d'argent juste. Autrement dit, la valeur espérée de sa fortune au temps $n+1$ sachant toute l'histoire jusqu'au temps n est

égale à sa fortune au temps n . On peut ainsi donner la définition suivante.

DÉFINITION 4.5

$M = (M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale par rapport à $X_0, X_1, \dots$ si pour tout $n \geq 0$,

- M_n est une variable aléatoire intégrable i.e. $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$,
- Pour tout $x_0, x_1, \dots, x_n$, on a la propriété de martingale

$$\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = 0.$$

$M_{n+1} - M_n$ est l'accroissement de la fortune du joueur. Ainsi, si on connaît l'historique du jeu jusqu'au temps n , l'espérance de l'accroissement de la fortune au temps $n + 1$ est nulle. On remarque que comme la condition doit être vraie pour tout $x_0, x_1, \dots, x_n$, on peut réécrire la propriété de martingale de la façon suivante plus compacte,

$$\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n | X_0, X_1, \dots, X_n] = 0.$$

Souvent, on aura $M_n = f(X_0, X_1, \dots, X_n)$ et ainsi sur l'événement $\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$, $M_n = f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ est constant. Ainsi, on pourra utiliser la propriété de l'espérance conditionnelle pour obtenir une autre formulation de la propriété de martingale car

$$\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n | X_0, X_1, \dots, X_n] = \mathbb{E}[M_{n+1} | X_0, X_1, \dots, X_n] - M_n$$

et ainsi la propriété devient

$$\mathbb{E}[M_{n+1} | X_0, X_1, \dots, X_n] = M_n.$$

EXEMPLE 22. Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d telles que $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. On définit la suite $(M_n)_{n \geq 0}$ par

$$M_n = S_n - n\mu, \quad M_0 = 0$$

Montrons que $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale par rapport à $(X_n)_{n \geq 1}$. On a clairement que M_n est intégrable car $\mathbb{E}[|M_n|] \leq \mathbb{E}[|S_n|] + n|\mu| \leq n\mathbb{E}[|X_1|] + n\mu < \infty$. Il est important de voir que l'on doit seulement prouver que M_n est intégrable mais pas que $\mathbb{E}[|M_n|]$ soit borné, la borne que l'on obtient peut dépendre de n . De plus, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1} | X_1, \dots, X_n] &= \mathbb{E}[S_{n+1} - (n+1)\mu | X_1, \dots, X_n] = \mathbb{E}[S_n + X_{n+1} - (n+1)\mu | X_1, \dots, X_n] \\ &= S_n - (n+1)\mu + \mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n] \\ &= S_n - (n+1)\mu + \mathbb{E}[X_{n+1}] \\ &= S_n - (n+1)\mu + \mu \\ &= S_n - n\mu = M_n. \end{aligned}$$

Dans la troisième égalité, on a utilisé le fait que $S_n = f(X_1, \dots, X_n)$ est constant sur l'événement $\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$ et ainsi on peut appliquer la propriété de l'espérance conditionnelle. Dans la quatrième égalité, on a utilisé l'indépendance des X_i pour voir que $\mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}] = \mu$. Ainsi, $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale par rapport à $(X_n)_{n \geq 1}$.

EXEMPLE 23. Prenons maintenant $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = -1).$$

Alors si $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, la suite $(M_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}, \quad M_0 = 1$$

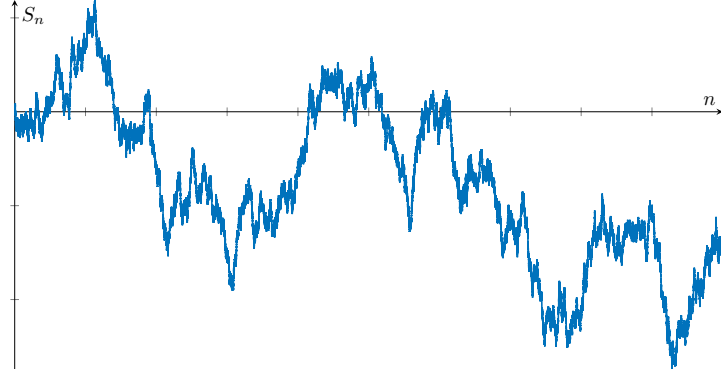


FIGURE 9 – Simulation of M with X_i following a Rademacher distribution : $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$.

est une martingale par rapport à $(X_n)_{n \geq 1}$. En effet, on a clairement que M_n est intégrable car

$$\mathbb{E}[|M_n|] = \mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}\right] = \left(p\frac{1-p}{p} + (1-p)\frac{p}{1-p}\right)^n = 1 < \infty.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1} | X_1, \dots, X_n] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_{n+1}} \middle| X_1, \dots, X_n\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n + X_{n+1}} \middle| X_1, \dots, X_n\right] \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}} \middle| X_1, \dots, X_n\right] \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}}\right] \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} \left(p\frac{1-p}{p} + (1-p)\frac{p}{1-p}\right) \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} = M_n. \end{aligned}$$

Dans la troisième inégalité, on a utilisé le fait que $S_n = f(X_1, \dots, X_n)$ et dans la quatrième égalité, on a utilisé l'indépendance des X_i pour voir que $\mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}} \middle| X_1, \dots, X_n\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}}\right]$. Ainsi, $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale par rapport à $(X_n)_{n \geq 1}$.

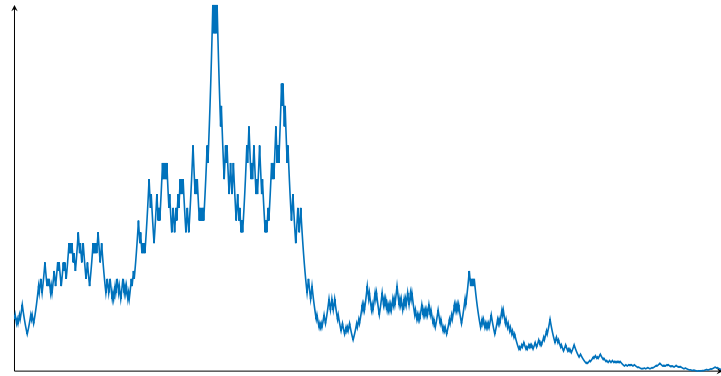


FIGURE 10 – Simulation of M with $p = 0.52$.

EXEMPLE 24. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables i.i.d. telles que $\mathbb{E}[X_i] = 0$ et $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. On définit

la suite $(M_n)_{n \geq 0}$ par

$$M_n = S_n^2 - n\sigma^2, \quad M_0 = 0$$

Montrons que $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale par rapport à $(X_n)_{n \geq 1}$. On a clairement que M_n est intégrable car

$$\mathbb{E}[|M_n|] \leq \mathbb{E}[S_n^2] + n\sigma^2 = n \operatorname{Var}(X_1) + n\sigma^2 = 2n\sigma^2 < \infty.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1}|X_1, \dots, X_n] &= \mathbb{E}[S_{n+1}^2 - (n+1)\sigma^2|X_1, \dots, X_n] \\ &= \mathbb{E}[(S_n + X_{n+1})^2 - (n+1)\sigma^2|X_1, \dots, X_n] \\ &= S_n^2 - (n+1)\sigma^2 + 2S_n \mathbb{E}[X_{n+1}|X_1, \dots, X_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}^2|X_1, \dots, X_n] \\ &= S_n^2 - (n+1)\sigma^2 + 2S_n \mathbb{E}[X_{n+1}] + \mathbb{E}[X_{n+1}^2] \\ &= S_n^2 - (n+1)\sigma^2 + 0 + \sigma^2 \\ &= S_n^2 - n\sigma^2 = M_n. \end{aligned}$$

Dans la troisième égalité, on a utilisé le fait que $S_n = f(X_1, \dots, X_n)$ et dans la quatrième égalité, on a utilisé l'indépendance des X_i pour voir que $\mathbb{E}[X_{n+1}|X_1, \dots, X_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}] = 0$ et $\mathbb{E}[X_{n+1}^2|X_1, \dots, X_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}^2] = \sigma^2$. Ainsi, $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale par rapport à $(X_n)_{n \geq 1}$.

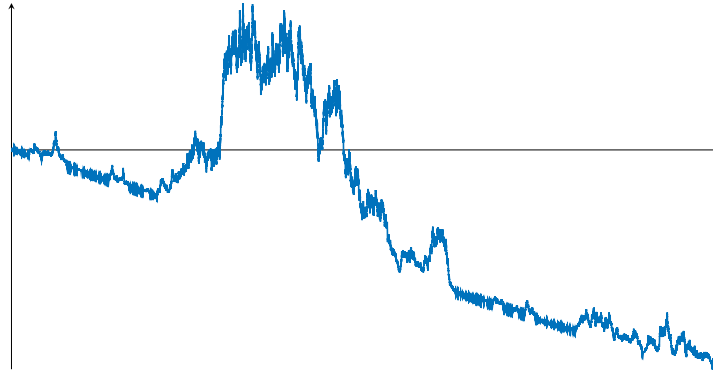


FIGURE 11 – Simulation of M with X_i following a Rademacher distribution : $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$.

4.3 Sous-martingales et sur-martingales

Dans la plupart des cas, un jeu n'est pas équilibré. Par exemple, en suivant la stratégie optimale au blackjack sans compter les cartes, le casino a un avantage entre 0,5% et 1% sur le joueur. Mais si le joueur compte les cartes, alors il peut avoir un avantage d'environ 2% sur le casino. On peut ainsi généraliser la notion de martingale en définissant les sous-martingales et les sur-martingales.

DÉFINITION 4.6

Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires intégrables. On dit que $(M_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale par rapport à $(X_n)_{n \geq 0}$ si pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|X_0, X_1, \dots, X_n] \geq M_n.$$

On dit que $(M_n)_{n \geq 0}$ est une sur-martingale par rapport à $(X_n)_{n \geq 0}$ si pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|X_0, X_1, \dots, X_n] \leq M_n.$$

EXEMPLE 25. On a vu que si X_i était i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_i] = \mu$, alors $M_n = S_n - n\mu$ était une martingale. Si $\mu \geq 0$,

on peut voir que S_n est une sous-martingale car

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|X_1, \dots, X_n] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}|X_1, \dots, X_n] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] = S_n + \mu \geq S_n.$$

De même, si $\mu \leq 0$, on peut voir que S_n est une sur-martingale.

On peut construire des sous-martingales et des sur-martingales à partir de martingales de la façon suivante.

PROPOSITION 4.7. Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale par rapport à $(X_n)_{n \geq 0}$ alors

$$\mathbb{E}[M_{n+1}^2|X_1, \dots, X_n] - M_n^2 = \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2|X_1, \dots, X_n] \geq 0.$$

En particulier, $(M_n^2)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale par rapport à $(X_n)_{n \geq 0}$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1}^2|X_1, \dots, X_n] - M_n^2 &= \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n + M_n)^2|X_1, \dots, X_n] - M_n^2 \\ &= \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2|X_1, \dots, X_n] + 2M_n \mathbb{E}[M_{n+1} - M_n|X_1, \dots, X_n] + M_n^2 - M_n^2 \\ &= \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2|X_1, \dots, X_n] \geq 0. \end{aligned}$$

□

De manière générale, on a le résultat suivant, plus général que le précédent que nous donnons sans preuve.

THÉORÈME 4.8

Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale par rapport à $(X_n)_{n \geq 0}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}[|f(M_n)|] < \infty$. Alors, la suite $(f(M_n))_{n \geq 0}$ est une sous-martingale par rapport à $(X_n)_{n \geq 0}$.

On a le résultat suivant qui nous donne l'évolution de l'espérance d'une sous-martingale ou d'une sur-martingale. En particulier, cela nous donne que notre fortune moyenne diminuera en jouant à un jeu d'argent défavorable.

PROPOSITION 4.9. Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale (resp. une sur-martingale) par rapport à $(X_n)_{n \geq 0}$. Alors, pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}[M_{n+1}] \geq \mathbb{E}[M_n] \quad (\text{resp. } \mathbb{E}[M_{n+1}] \leq \mathbb{E}[M_n]).$$

En particulier si M est une martingale alors $\mathbb{E}[M_{n+1}] = \mathbb{E}[M_n]$.

Démonstration. On a pour M une sous-martingale,

$$\mathbb{E}[M_{n+1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1}|X_0, X_1, \dots, X_n]] \geq \mathbb{E}[M_n].$$

Pour M une sur-martingale alors $-M$ est une sous-martingale et le résultat est direct. Si M est une martingale alors c'est une sous-martingale et une sur-martingale et le résultat en découle. □