

Feuille d'Exercices IX

Probabilités

Exercice 1. Soient X et Y un couple de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $X \sim \text{Unif}(0, 1)$ et $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On définit un nouveau couple de variables aléatoires

$$U = X + Y \quad \text{et} \quad V = X - Y.$$

1. Déterminer la densité de probabilité jointe de (U, V) .
2. En déduire les lois marginales de U et de V .

Exercice 2. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Calculer la densité jointe du couple de variables aléatoires $(\frac{X}{Y}, Y)$.
2. En déduire la densité de $\frac{X}{Y}$. Cette loi est appelée une loi de Cauchy.
3. Calculer la densité de la variable aléatoire $\frac{1}{X^2}$.

Exercice 3. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées $\text{Exp}(\lambda)$ et

$$Y_i = X_1 + \dots + X_i = \sum_{k=1}^i X_k.$$

1. Donner la densité conjointe de $Y_1, \dots, Y_n$.
2. Donner la densité de Y_n en utilisant la Question 3.1.

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires. On cherche à estimer Y à partir de X en considérant la variable aléatoire $Y_{a,b} = aX + b$. On veut donc chercher les coefficients a, b qui vont minimiser l'erreur

$$\varepsilon_{a,b} = \mathbb{E} [|Y - Y_{a,b}|^2].$$

1. Calculer $\varepsilon_{a,b}$ en fonction de X , de Y , de a et de b .
2. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial \varepsilon_{a,b}}{\partial a}$ et $\frac{\partial \varepsilon_{a,b}}{\partial b}$.
3. On admet que le minimum est atteint lorsque ces dérivées partielles sont nulles. Trouver les a et b optimaux.

Exercice 5. (*Plus difficile*). On considère $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes avec $X_i \sim \text{Unif}(0, 1)$.

1. Une permutation σ est une bijection de $\{1, \dots, n\}$ vers $\{1, \dots, n\}$. Construire à l'aide des événements $A_\sigma = \{X_{\sigma(1)} < \dots < X_{\sigma(n)}\}$ des variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ telles que

$$Y_1 \leq \dots \leq Y_n \quad \text{et} \quad \{Y_1, \dots, Y_n\} = \{X_1, \dots, X_n\}.$$

En d'autres termes, les variables aléatoires Y_i sont les mêmes que X_i mais réordonnées.

2. Calculer pour f une fonction $\mathbb{E}[f(Y_1, \dots, Y_n)]$ et en déduire la densité jointe de $(Y_1, \dots, Y_n)$.
3. Donner la densité jointe des variables aléatoires $\frac{Y_1}{Y_2}, \dots, \frac{Y_{n-1}}{Y_n}$.
4. Quelle est la densité de $\frac{Y_i}{Y_{i+1}}$? Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?



Mikhaïl Vassilievitch Ostrogradski
(1801–1862)



Karl Pearson
(1857–1936)

