

Feuille d'Exercices VIII

Probabilités

Exercice 1. On dit que X et Y une distribution jointe gaussienne bivariable si elles ont pour densité jointe

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right)\right).$$

1. Donner les lois marginales de X et de Y .
2. Calculer la loi conditionnelle de X sous $Y = y$.
3. Pour quelles valeurs de ρ est-ce que X et Y sont indépendantes ?

Exercice 2. On suppose que le nombre N d'enfants dans une famille suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose qu'à chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit une fille est $p \in (0,1)$ et celle que ce soit un garçon est $q = 1 - p$. On suppose aussi que les sexes de naissances successives sont indépendants. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de filles par familles, et Y celle du nombre de garçons.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (N, X) .
2. En déduire la loi de X et celle de Y .

Exercice 3. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles dont la densité s'écrit

$$f_{X,Y}(x,y) = ye^{-y(x+1)}\mathbb{1}_{x \geq 0, y \geq 0}.$$

1. Vérifier que c'est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la densité marginale de Y . Quelle est sa loi ?
3. Calculer la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$. Quelle est cette loi conditionnelle ?
4. Calculer la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$.

Exercice 4. On considère $n + m$ épreuves indépendantes avec une probabilité de succès X où $X \sim \text{Unif}(0,1)$. Quelle est la distribution conditionnelle de X sachant qu'il y a eu n succès ?

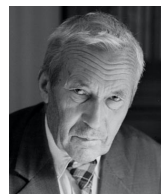
Exercice 5. Dans les systèmes de communications numériques, les signaux sont souvent quantifiés sur 1 bit et ne prennent donc que les valeurs 0 ou 1. Soient X et Y les variables aléatoires donnant les valeurs d'un tel signal à deux instants distincts. Elles sont caractérisées par la distribution de probabilité conjointe

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=0, Y=0) &= a & \mathbb{P}(X=0, Y=1) &= b, \\ \mathbb{P}(X=1, Y=0) &= c & \mathbb{P}(X=1, Y=1) &= d. \end{aligned}$$

1. Quelle relation doivent vérifier les quatre nombres a, b, c et d ?
2. Calculer l'espérance $\mathbb{E}[XY]$.
3. Calculer les distributions marginales de X et de Y et donner leur espérance.
4. Montrer que $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$ si $d - (c+d)(b+d) = (c+d)(c+a) - c = 0$.
5. Calculer la loi de probabilité conditionnelle de X sous $Y=0$ et $Y=1$. Que deviennent ces lois lorsque l'on a la condition trouvée à la question précédente ? Que peut-on dire ?



Émile Borel
(1871–1956)



Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov
(1903–1987)

