

Feuille d'Exercices VII

Probabilités

Exercice 1. On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit au hasard de façon équiprobable une boîte, puis une boule dans cette boîte. On note X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi jointe du couple (X, Y) ,
2. En déduire la loi de Y .
3. Calculer l'espérance de Y

Exercice 2. On considère une suite de lancers de pile ou face indépendants, la probabilité d'obtenir pile étant $p \in (0, 1)$. On note X (respectivement Y) le rang du premier (respectivement du deuxième) pile.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. En déduire la loi de Y .

Exercice 3. On effectue une suite de lancers avec une pièce non équilibrée telle que la probabilité d'obtenir pile vaut $\frac{3}{4}$. On note X la longueur de la première chaîne, le nombre de tirages initiaux donnant le même résultat que le premier tirage. On note Y la longueur de la deuxième chaîne (par exemple si on a $FFPPPPFPF\dots$ alors $X = 2$ pour les premiers FF et $Y = 3$ pour les PPP qui suivent).

1. Calculer la loi de X .
2. Calculer la loi du couple (X, Y) .
3. Calculer la loi de Y .
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4. Soit T l'intérieur du triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$. On dénote (X, Y) les coordonnées d'un point choisi uniformément sur T .

1. Donner la densité jointe de (X, Y) .
2. Calculer les lois marginales de X et de Y .
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$.

Exercice 5. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 . On pose $Y = \min(X_1, X_2)$.

1. Pour tout réel y , calculer $\mathbb{P}(Y > y)$. En déduire que Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
2. Deux guichets sont ouverts à une banque. Le temps de service au premier guichet (resp. au deuxième) suit une loi exponentielle de moyenne 20 minutes (respectivement 30 minutes). Deux clients rentrent simultanément, l'un choisit le guichet 1 et l'autre le guichet 2. En moyenne, après combien de temps sort le premier ?
3. En moyenne, après combien de temps sort le dernier ?



Georg Bohlmann
(1869–1928)



Sergei Natanovich Bernstein
(1880–1968)

