

Feuille d'Exercices VI

Probabilités

Exercice 1. Parmi les fonctions suivantes, dites lesquelles sont des densités de probabilité. Si c'en est une, donner leur fonction de répartition.

1. $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3. $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

4. $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1, 0], \\ 1-x & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^3} & \text{si } |x| > 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

6. $f(x) = \sin(x) + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

1. En utilisant l'Exercice 1.3, justifier que c'est une densité de probabilité et donner sa fonction de répartition associée.

2. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

Montrer que φ est une fonction strictement croissante et à valeurs dans $(-1, 1)$. Déterminer la fonction réciproque de φ . C'est-à-dire une fonction $\psi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = y \Leftrightarrow x = \psi(y)$.

3. Soit X une variable aléatoire de densité f . On définit $Y = \varphi(X)$. Déterminer la fonction de répartition et la densité de Y . Quelle est sa loi ?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f . On définit $Y = \ln(1 + |X|)$. Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X .

3. Calculer la densité de Y et reconnaître sa loi.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On note $Y = \lceil X \rceil$ sa partie entière supérieure (par exemple $\lceil 0.3 \rceil = 1$, $\lceil 1 \rceil = 1$, $\lceil 2.8 \rceil = 3$).

1. Montrer que Y suit une loi géométrique et donner son paramètre.

2. On dénote $Z = Y - X$. Donner sa fonction de répartition.

3. Donner sa densité.

Exercice 5. Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. Montrer que pour toute fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[(X - \mu)g(X)] = \sigma^2 \mathbb{E}[g'(X)]$.

2. On considère son taux de défaillance λ et on suppose que $\mu = 0$ et $\sigma = 1$. Alors montrer que pour $t > 0$

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} < \frac{1}{\lambda(t)} < \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} + \frac{3}{t^5}.$$

Indication: On pourra utiliser le fait que si ϕ est la densité d'une variable gaussienne centrée réduite alors $\phi'(x) + x\phi(x) = 0$.



Abraham de Moivre
(1667–1754)



Pierre-Simon de Laplace
(1749–1827)



Charles Max Stein
(1920–2016)

