

Feuille d'Exercices V

Probabilités

Exercice 1. On lance n fois une pièce parfaitement équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de piles que de faces ?

Exercice 2. Deux joueurs lancent, chacun leur tour, un dé puis recommencent dans le même ordre, jusqu'à ce qu'un joueur obtienne un 6. La partie s'arrête alors et le joueur qui a obtenu le 6 a gagné. Le dé est truqué et la probabilité de tomber sur un 6 est $p \in (0, 1)$. On veut calculer la probabilité de gagner de chacun des joueurs. On note

$$G_i = \{\text{le joueur } i \text{ gagne}\}, \quad \text{pour } i \in \{1, 2\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{P}(G_2) = (1 - p)\mathbb{P}(G_1)$ en conditionnant sur le premier lancer étant un 6 ou non.
2. Démontrer que $\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(G_2) = 1$.
3. En déduire $\mathbb{P}(G_1)$ et $\mathbb{P}(G_2)$.
4. Retrouver directement le résultat en considérant les événements $A_k = \{\text{le premier 6 apparaît au } k\text{-ième lancer}\}$.
5. On suppose maintenant que le même jeu est réalisé avec 3 joueurs. On considère X le nombre de lancers effectués lors de la partie. Donner la loi de X .
6. En déduire la probabilité de gagner pour chacun des joueurs.

Exercice 3. Un insecte pond des oeufs. Le nombre d'oeufs pondus est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque oeuf a une probabilité p d'éclore, indépendante des autres oeufs. Soit Z le nombre d'oeufs qui ont éclos.

1. Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}(Z = k | X = n)$.
2. en déduire la loi de Z .
3. Quelle est l'espérance de Z ?

Exercice 4. Deux joueurs jouent au jeu suivant. ON tire un nombre entier naturel X au hasard et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Si X est impair, le premier joueur gagne et reçoit X dollars de l'autre joueur. Si X est pair supérieur à 2 alors le deuxième joueur gagne et reçoit X dollars du premier joueur. Si $X = 0$, la partie est nulle. On note p la probabilité que le premier joueur gagne et q que le deuxième gagne.

1. En calculant $p + q$ et $p - q$, déterminer la valeur de p et de q .
2. Déterminer l'espérance des gains de chacun. Qui est avantagé ?

Exercice 5. Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de n clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile mais il ne sait plus laquelle.

1. Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas marché. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.
2. Maintenant, après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.



Pierre de Fermat
(160X–1665)



Siméon Denis Poisson
(1781–1840)



Poisson est mon arrière-arrière-arrière-arrière-arrière-arrière-arrière-arrière-arrière-grand-père académique !
Bourgade → Yor → Priouret → Neveu → Fortet → Fréchet → Hadamard → Picard → Darboux → Chasles → Poisson