

Feuille d'Exercices IV

Probabilités

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F est définie par, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -2, \\ \frac{1}{30} & \text{si } -2 \leq t < 0, \\ \frac{1}{12} & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ \frac{1}{4} & \text{si } 1 \leq t < 3, \\ \frac{1}{3} & \text{si } 3 \leq t < 5, \\ 1 & \text{si } t \geq 5. \end{cases}$$

1. Montrer que X est une variable aléatoire discrète et donner sa loi de probabilité.
2. Calculer $\mathbb{P}(-3 \leq X < \frac{1}{2})$.
3. Calculer l'espérance de X .

Exercice 2. On considère un dé à 6 face truqués. On note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face obtenue. On suppose que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur la face.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et son espérance.

Exercice 3. On lance deux dés équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, N\}$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^N \mathbb{P}(X \geq n)$$

Exercice 5. On considère une urne contenant b boules blanches et r boules rouges, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule dans l'urne : si elle est blanche on arrête de tirer, si elle est rouge, on la remplace dans l'urne par une boule blanche. On répète cette opération jusqu'à l'obtention d'une boule blanche. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. On suppose tout d'abord que $b = 2$ et $r = 3$. Donner la loi de probabilité de X et son espérance.
2. On se place maintenant dans le cas général et on dénote

$$A_n = \{\text{la } n\text{-ième boule tirée est rouge}\}.$$

Pour chaque valeur k prise par X , exprimer $\{X = k\}$ en termes des A_k .

3. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Exercice 6. On considère un principe similaire à l'exercice précédent. Une urne contient deux boules rouges et une boule blanche. On tire des boules de la façon suivante : si elle est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est rouge, on remet dans l'urne, à la place de la boule rouge, une boule blanche. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit Y_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges dans l'urne à l'issue du n -ième tirage. On remarque que $Y_n \in \{0, 1, 2\}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de Y_1 .
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(Y_n = 2)$.
3. On pose maintenant pour $N \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$. Calculer p_1 et démontrer que pour $n \geq 1$,

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{2}{3^{n+1}}.$$

4. En considérant la suite $q_n = p_n + \frac{2}{3^n}$. Donner la valeur de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En déduire $\mathbb{P}(Y_n = 0)$ et calculer l'espérance de Y_n .



Christiaan Huygens
(1629–1695)



Jacques Bernoulli
(1655–1705)

