

Feuille d'Exercices III

Probabilités

Exercice 1. Un homme possède 5 pièces : deux ont Face sur leur deux côtés, deux on Pile sur leur deux côtés et la dernière est une pièce normale.

1. Il prend une pièce au hasard et la lance. Quelle est la probabilité que la face cachée de la pièce soit Face ?
2. Il ouvre ses yeux et voit que la face montrée est Face. Quelle est la probabilité que la face cachée de la pièce soit face conditionnellement à cet observation ?
3. Il ferme ses yeux, reprend la pièce et la relance. Quelle est la probabilité que la face cachée de la pièce soit Face conditionnellement à ce qu'il s'est passé ?
4. Il ouvre ses yeux et voit que la pièce montre Face. Quelle est la probabilité que la face cachée soit Face ?
5. Il se défause de cette pièce, il en lance une nouvelle. Quelle est la probabilité que la pièce montre Face ?

Exercice 2. 1. On lance n dés et on considère A_{ij} l'événement où le lancer i et le lancer j donne la même valeur. Montrer que les événements sont deux à deux indépendants mais pas totalement indépendants.

2. On lance deux dés. Montrer que l'événement où la somme des deux dés fasse 7 est indépendantes du résultat du premier dé.
3. Soit X et Y les valeurs de deux dés à 6 faces. Soient les événements

$$A_1 = \{X + Y = 9\}, \quad A_2 = \{X \in \{1, 2, 3\}\} \quad \text{et} \quad A_3 = \{X \in \{3, 4, 5\}\},$$

montrer que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2) \mathbb{P}(A_3)$. Les événements sont-ils indépendants ?

Exercice 3. Une pièce équilibré est lancé à répétition. Montrer que ces deux énoncés sont équivalents :

- Les résultats de chaque lancer sont indépendants.
- Pour tout $m \geq 1$ et pour tout suite de longueur m de Face et de Pile, la probabilité que cette suite se réalise dans les m premiers lancers est 2^{-m} .

Exercice 4. Alexandre, Benjamin, Charlotte et David sont amis à l'école. Chaque paire d'amis se rencontrent et avec probabilité p ils vont se disputer et $1 - p$ devenir de très bons amis. Ces disputent se réalisent de manière indépendantes parmi chaque paire. Dans le futur, si quelqu'un entend une rumeur alors il ou elle ne la raconte qu'à ses très bons amis. Si Alexandre entend une rumeur quelle est la probabilité que

1. David l'entende (Il n'est pas obligé de l'entendre d'Alexandre directement) ?
2. David l'entende si Alexandre et Benjamin se sont disputés ?
3. David l'entend si Benjamin et Charlotte se sont disputés ?
4. David l'entende s'il s'est disputé avec Alexandre ?

Exercice 5. Deux joueurs A et B misent sur les résultats successifs du jet répété d'une pièce. À chaque jet, A reçoit \$1 de la part de B si Pile est sorti et donne \$1 à B dans le cas contraire. Le jeu se poursuit tant que les joueurs ne sont pas ruinés. On suppose que les lancers de pièces sont indépendants et que Pile apparaît avec probabilité p et Face avec probabilité $1 - p$. Initialement A a une fortune de \$ i dollars et B de \$($N - i$). On veut calculer la probabilité que A gagne i.e. que la fortune de B tombe à zéro.

1. On appelle $E_i = \{A \text{ gagne en commençant avec } \$i \text{ et } B \text{ avec } \$N - i\}$ et $P_i = \mathbb{P}(E_i)$. En conditionnant par rapport au premier jet, montrer que

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}.$$

2. Combien valent P_0 et P_N ?

3. Montrer que

$$P_i = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \frac{q}{p}} P_1 & \text{si } \frac{q}{p} \neq 1 \\ iP_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Indication : On réécrit l'équation de la question 1. $P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1})$ pour $i = 1, 2, \dots, N-1$.



Gerolamo Cardano
(1501–1576)



Blaise Pascal
(1623–1662)

